Tölfræði frá grunni

Anna Helga Jónsdóttir **Sigrún Helga Lund**

Hönnun kápu: Arnór Bogason
Prentun: Háskólafjölritun

6. prentun, desember 2015

Efnisyfirlit

Efnisyfirlit i

Þakkir 1

Tákn 3

1 Inngangur 7

2 Frá tilraun til gagna 11

2.1 Úrtak og þýði . . . 11
2.2 Breytur . . . 12
2.3 Bjagi og breytileiki . . . 16
2.4 Úrtakshögun . . . 17
2.5 Blindun . . . 21
2.6 Orsakasamband . . . 24

3 Myndræn framsetning 31

3.1 Stöplarit og kökurit . . . 31
3.2 Stuðlarit . . . 35
3.3 Kassarit . . . 40
3.4 Punktarit . . . 43

4 Lýsandi tölfræði 49

4.1 Lýsistærðir . . . 49
4.2 Lýsistærðir fyrir miðju . . . 50
4.3 Lýsistærðir fyrir breytileika . . . 57
4.4 Fylgnistuðull . . . 65
4.5 Lýsistærðir fyrir samband hlutfalla . . . 69

4.6 Lýsistærðir fyrir flokkunaraðferðir 72
4.7 Samantekt um lýsistærðir 75

5 Líkindafræðileg undirstaða 81
5.1 Slembistærðir 81
5.2 Stærðfræðilegir eiginleikar slembistærða 86
5.3 Strjálar líkindadreifingar 90
5.4 Samfelldar líkindadreifingar 105

6 Ályktunartölfræði 127
6.1 Úrtaksdreifing lýsistærðar 127
6.2 Lýsistærðin meðaltal 128
6.3 Höfuðsetning tölfræðinnar 134
6.4 Metlar og prófstærðir 134
6.5 Öryggisbil 139
6.6 Tilgátupróf 140

7 Ályktanir um flokkabreytur 157
7.1 Ályktanir um hlutfall þýðis 157
7.2 Ályktanir um hlutföll tveggja þýða 160
7.3 Ályktanir um hlutföll fleiri þýða 164
7.4 Tengslatöflur 170

8 Ályktanir um talnabreytur 177
8.1 Ályktanir um dreifni 177
8.2 Ályktanir um meðaltöl 182

9 Fervikagreining 211
9.1 Einþátta fervikagreining 211

10 Aðhvarfsgreining 221
10.1 Einfalt línulegt aðhvarf 221

10.2 Ályktanir í aðhvarfsgreiningu 230
10.3 Fervikagreining í aðhvarfsgreiningu 235

11 Tvíkosta aðhvarfsgreining 243
11.1 Tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkanið 243
11.2 Tvíkosta aðhvarfsgreining með samfelldri skýribreytu 244
11.3 Tvíkosta aðhvarfsgreining með strjálli skýribreytu 245
11.4 Líkur í tvíkosta aðhvarfsgreiningu 246

Dæmalausnir 251

Tafla: Normaldreifing 260

Tafla: t-dreifing 264

Tafla: χ^2-dreifing 265

Tafla: F-dreifing 266

Íslensk-enskur orðalisti 271

Ensk-íslenskur orðalisti 275

Atriðisorðaskrá 278

Þakkir

Við vorum þeirrar gæfu aðnjótandi að hljóta liðsinni margra kærra vina og samstarfsmanna við gerð þessarar bókar. Þar ber fyrstan að nefna leiðbeinanda okkar beggja úr doktorsnáminu Gunnar Stefánsson. Hann hefur sýnt okkur ómælda þolinmæði og stuðning, verið hafsjór fróðleiks og ávallt reiðubúinn til skrafs og ráðagerða. Takk elsku Gunnar.

Uppáhalds sumarstarfsmanni okkar, Einari Bjarka Gunnarssyni, viljum við þakka sérstaklega fyrir uppsetningu bókarinnar. Einnig viljum við koma á framfæri kærum þökkum til okkar ágætu samstarfsmanna við Háskóla Íslands, þeim Birgi Hrafnkelssyni, Hermanni Þórissyni og Thor Aspelund. Þeir hafa gefið ómetanlegar ráðleggingar varðandi bæði þýðingar á enskum heitum en einnig meðferð líkinda- og tölfræðihugtaka og framsetningu þeirra. Sigríði Geirsdóttur, Ingunni Jónsdóttur, Önnu Heru Björnsdóttur, Atla Norðmann, Bjarka Þór Elvarssyni, Jóni Kristjánssyni og Finnboga Ómarssyni þökkum við vandaðan yfirlestur og Arnóri Bogasyni hönnun kápunnar.

Ástkærar fjölskyldur okkar og vinir hafa reynst ómetanlegur stuðningur. Sömuleiðis viljum við þakka öllum okkar gleðigjöfum í Tæknigarði sem hafa glatt okkur með nærveru sinni ásamt frábæru nemendunum okkar í námskeiðunum Tölfræði, Tölfræði og gagnavinnsla og Líftölfræði I vorin 2011-2015.

Við viljum þakka eftirfarandi stofnunum sem styrktu gerð bókarinnar:

- Nýsköpunarsjóður Námsmanna
- Verkfræði- og náttúruvísindasvið Háskóla Íslands
- Tölfræðimiðstöð Háskóla Íslands

Að lokum viljum við benda á fésbókarsíðu bókarinnar:

`http://www.facebook.com/tolfraedifragrunni`

Þar munum við koma á framfæri leiðréttingum ef einhverjar verða og þú, lesandi góður, getur komið með athugasemdir/ábendingar um efni bókarinnar.

Reykjavík, 2015
Anna Helga og Sigrún Helga.

Tákn

Eftirfarandi er listi af táknum sem notuð eru í bókinni. Táknin eru sýnd í sömu röð og þau koma fyrir í bókinni.

n: Fjöldi mælinga. Fjöldi Bernoulli tilrauna.

$x_1 \ldots x_n$: Frá fyrstu mælingu til þeirrar síðustu.

$x_{\min}$: Minnsta mælingin.

$x_{\max}$: Stærsta mælingin.

M: Miðgildi.

$\bar{x}$: Meðaltal úrtaks.

$\sum$: Summutákn.

$\sum_{i=1}^{n} x_i$: Summan frá mælingu 1 og upp í mælingu n.

$\bar{x}_w$: Vegið meðaltal.

Q_1: Fyrsta fjórðungamark.

Q_2: Annað fjórðungamark.

Q_3: Þriðja fjórðungamark.

IQR: Fjórðungaspönn.

s^2: Dreifni úrtaks.

s: Staðalfrávik úrtaks.

CV: Frávikshlutfall.

Ω: Útkomumengi.

$A \cup B$: Sammengi atburðanna A og B.

$A \cap B$: Sniðmengi atburðanna A og B.

A^C: Fyllimengi atburðarins A.

$P(A)$: Líkurnar á atburðinum A.

$P(A|B)$: Skilyrtar líkur á að atburður A gerist að því gefnu að B hafi gerst.

$P(X \leq a)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði minni eða jöfn gildinu a.

$P(X < a)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði minni en gildið a.

$P(X \geq a)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði stærri eða jöfn gildinu a.

$P(X > a)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði stærri en gildið a.

$P(a \leq X \leq b)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði á milli a og b, bæði gildin meðtalin.

$P(a < X < b)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði á milli a og b, a og b ekki meðtalin.

$P(X = a)$: Líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði nákvæmlega gildið a.

$E[X]$: Væntigildi slembistærðarinnar X.

μ: Væntigildi. Meðaltal þýðis. Meðaltal normaldreifingar.

$Var[X]$: Dreifni slembistærðarinnar X.

σ^2: Dreifni. Dreifni þýðis. Dreifni normaldreifingar.

σ: Staðalfrávik. Staðalfrávik þýðis. Staðalfrávik normaldreifingar.

$f(x)$: Massafall strjálla slembistærða. Þéttifall samfelldra slembistærða.

$B(n,p)$: Tvíkostadreifing með stikana n og p.

p: Líkur á jákvæðri úrkomu í hverri Bernoulli tilraun fyrir sig. Úrtakshlutfall.

$X \sim B(n,p)$: X fylgir tvíkostadreifingu með stikana n og p.

$\binom{n}{k}$: Tvíliðustuðullinn.

$Pois(\lambda)$: Poisson dreifing með stikann λ.

λ: Stiki Poisson dreifingar, væntanlegur fjöldi jákvæðra útkoma.

$F(x)$: Dreififall.

$\phi(z)$: Þéttifall normaldreifingarinnar.

$\Phi(z)$: Dreififall normaldreifingarinnar.

Z: Slembistærð sem fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Prófstærð z-prófs.

z_α: Það z-gildi sem um gildir að slembistærð sem fylgir stöðluðu normaldreifingunni hefur líkurnar α að að taka gildi sem er minna en z_α.

k: Fjöldi frígráða í t-dreifingu og χ^2-dreifingu.

$t_{\alpha,(k)}$: Það t-gildi sem um gildir að slembistærð sem fylgir t-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar α að taka gildi sem er minna en $t_{\alpha,(k)}$.

$\chi^2_{\alpha,(k)}$: Það χ^2-gildi sem um gildir að slembistærð sem fylgir t-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar α að taka gildi sem er minna en $\chi^2_{\alpha,(k)}$.

v_1, v_2: Fjöldi frágráða í F-dreifingu.

$F_{\alpha,(v_1,v_2)}$: Það F-gildi sem um gildir að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með v_1 og v_2 frígráður hefur líkurnar α að taka gildi sem er minna en $F_{\alpha,(v_1,v_2)}$.

$\bar{X}$: Metillinn sem við notum til að meta meðaltal.

S: Metilinn sem við notum til að meta dreifni.

P: Metillinn sem við notum til að meta hlutfall.

H_0: Núlltilgáta.

H_1: Gagntilgáta.

α: Villulíkur. Villa af gerð I.

β: Villa af gerð II.

$1-\beta$: Styrkur tilgátuprófs.

T: Prófstærð t-prófs.

δ: Mismunur í tilgátuprófi fyrir tvö meðaltöl.

s_p^2: Vegin dreifni.

ν: Fjöldi frígráða í tveggja hópa t-prófi, tilvik 4.

D: Mismunur paraðra mælinga.

$\bar{D}$: Meðaltal mismuna paraðra mælinga.

S_D^2: Dreifni mismuna paraðra mælinga.

y_{ij}: Mæling númer j úr hópi i.

a: Fjöldi hópa.

n_i : Fjöldi mælinga í hópi i.

N : Heildarfjöldi mælinga.

$\bar{y}_{i.}$: Meðaltal hóps i.

$\bar{y}_{..}$: Meðaltal allra mælinga.

SS_T: Heildarfervikasumma.

SS_{Tr}: Fervikasumma milli hópa.

SS_E: Fervikasumma innan hópa.

MS: Meðalfervikasumma.

F: Prófstærð sem fylgir F dreifingu.

$\hat{p}$: Mat á þýðishlutfallinu P.

β_0: Skurðpunktur beinnar línu.

o: Gagnlíkindi.

RR: Áhættuhlutfall.

OR: Gagnlíkindahlutfall.

SJ: Sannar jákvæðar.

SN: Sannar neikvæðar.

FJ: Falskar jákvæðar.

FN: Falskar neikvæðar.

β_1: Hallatala beinnar línu.

β_0: Skurðpunktur beinnar línu.

r: Fylgnistuðull úrtaks.

$\hat{y}$: Spágildi fyrir y.

e: Leifar.

r^2: Skýringarhlutfall.

ε: Óvissan sem er í mælingum okkar á Y í aðhvarfsgreiningu.

s_e^2: Mat á σ^2 í línulegu aðhvarfi.

ρ: Fylgnistuðull þýðis.

1. kafli

Inngangur

Nú á dögum er hægt að fá tölulegar upplýsingar um nánast allt milli himins og jarðar og mikilvægi góðrar tölfræðikunnáttu fer vaxandi hjá sífellt fleiri fræðasviðum. Hvort sem um er að ræða lyfjafræðing sem vill kanna hvort nýtt lyf hafi sambærilega virkni og önnur lyf á markaðnum eða ferðamálafræðing sem skoðar vinsælustu áfangastaði hérlendis, styðjast báðir aðilar við tölfræði til að draga ályktanir sínar.

Í stuttu máli má segja að verkefni okkar í tölfræði snúist um að nýta sem best þær upplýsingar sem við fáum með tölulegum gögnum. Til að svo megi verða þarf að huga að mörgu: Högun tilraunarinnar þaðan sem gögnunum er aflað, skráningu og úrvinnslu gagnanna og að lokum túlkun á niðurstöðunum. Í þessari bók verður veigamestu atriðum þessara fjögurra þátta gerð skil og auk þess fjallað um hinar ýmsu tölfræðiaðferðir sem nota má á breiðan flokk gagna.

Framsetning

Lestur þessarar bókar gerir ekki forkröfu um stærðfræðikunnáttu utan almenns stúdentsprófs og ætti hún því að vera aðgengileg flestum þeim sem feta sín fyrstu spor í tölfræðinámi. Skerpt er á áhersluatriðum með því að rita þau í áherslukassa eins og sjá má á næstu síðu. Sérhver kassi ber titil og enska þýðingu á titlinum þegar við á. Þeir hafa einnig hver sitt númer sem vísar til kaflans þar sem þeir standa. Því ætti að vera fljótlegt að fletta upp kössum sem vísað er til í öðrum köflum.

Þegar kassarnir innihalda áhersluatriði sem eru stærðfræðilega krefjandi fylgir nánari skýring á umfjöllunarefni kassans beint að honum loknum í skýringarkassa. Hann má sjá á næstu síðu. Lesendur með góða stærðfræðikunnáttu geta því litið framhjá efni skýringarkassanna en þeir koma lesendum með minni færni í stærðfræði vonandi að góðum notum.

1.1. Áhersluatriði (Ensk þýðing ef við á)

Lýsing á áhersluatriðinu.

Nánari skýring á áhersluatriðinu að ofan ef þurfa þykir.

Tugabrotum er skipt upp í heiltöluhluta og aukastafi. Á Íslandi er hefð fyrir því að nota kommu til að skilja á milli heiltöluhluta og aukastafa tugabrota. Heiltöluhlutinn stendur vinstra megin við kommuna en aukastafirnir hægra megin við hana. Sá ritháttur er þó sjaldgæfur í öðrum löndum, algengast er að punktur sé notaður til að greina á milli heiltöluhluta og aukastafa. Það veldur því að mörg tölfræðiforrit gera ráð fyrir því að aukastafir tugabrota séu aðgreindir með punkti og stundum getur verið illfært að lesa inn gögn þar sem komma er notuð til aðgreiningar. Þá sögu er til að mynda að segja um tölfræðiforritið R sem er geysiöflugt og mikið notað bæði hér á landi sem erlendis. Því munum við ætíð nota **punkt** til aðgreiningar aukastafa. Þannig er stærðin „þrír komma fjórir" ritað 3.4 en ekki 3,4 eins og margir eiga að venjast.

Athugið einnig að fjöldi aukastafa á að vera í samræmi við nákvæmni gagna. Ágætt er að miða við að gefa upp stærðir einum til tveimur aukastöfum nákvæmar en upprunalegu mælingarnar eru.

Yfirlit yfir efni bókarinnar

Tölfræði getur verið margslungin og til að beita henni af öryggi er viss kunnátta í stærðfræði, sérstaklega líkindafræði, nauðsynleg. Því leggjum við nokkrar lykkjur á leið okkar í umfjöllun um tölfræði; til að leggja grunn að þeim líkindafræðihugtökum sem á þarf að halda. Þessar lykkjur mega þó ekki verða til þess að við missum stefnuna og því ætlum við í upphafi lesturs að gefa stutt yfirlit yfir það hvað tölfræði er og hvert markmið okkar er með þeim tölfræðiaðferðum sem við beitum.

Margar kennslubækur skipta tölfræði upp í *lýsandi tölfræði* og *ályktunartölfræði*. Þó að þessir tveir flokkar dugi ekki til að lýsa öllu því sem við köllum tölfræði, eins og til dæmis úrtakshögun, þá eru þeir afar mikilvægir og spanna ógrynni gagnlegra aðferða.

Lýsandi tölfræði (descriptive statistics) snýst um að lýsa sem best því úrtaki sem við höfum í höndunum. Það gerum við bæði með því að reikna útkomur ákveðinna lýsistærða sem lýsa gögnunum en einnig með því að setja gögnin skýrt fram á myndrænan hátt. Þið hafið eflaust heyrt um algengustu lýsistærðirnar eins og meðaltal og staðalfrávik og það er sjaldgæft að fletta dagblaði án þess að rekast á nokkur gröf. Lýsandi tölfræði verður tekin fyrir í köflum 3 og 4.

Ályktunartölfræði (inferential statistics) beinir kastljósinu frá úrtakinu sjálfu og að öllu þýðinu. Markmið ályktunartölfræði er að staðhæfa um allt þýðið út frá úrtaki sem við höfum mælingar á. Þar koma fyrir hugtök eins og *öryggisbil* og *villulíkur* sem oft eru notuð í daglegu tali. Ályktunartölfræði er eingöngu hægt að framkvæma á *slembiúrtökum* sem kynnt eru í kafla 2. Því leyfum við okkur, þegar við fjöllum um ályktunartölfræði, að tala um úrtök þegar við eigum strangt til tekið við slembiúrtök.

Líkt og í lýsandi tölfræði reiðum við okkur á lýsistærðir í ályktunartölfræði. Hins vegar skoðum við ekki einvörðungu útkomuna sjálfa heldur segjum einnig til um hvaða önnur gildi er líklegt að fá ef nýtt slembiúrtak væri valið. Slíkt krefst þekkingar á líkindafræði, slembistærðum, helstu líkindadreifingum og nánari kynnum af líkindafræðilegum eiginleikum lýsistærða. Þessi atriði verða tekin fyrir í kafla 5. Að því loknu fjöllum við um þá hugmyndafræði sem ályktunartölfræði byggir á (í kafla 6) en ályktunartölfræði mun ráða ríkjum í öllum köflum þaðan í frá.

Sú ályktunartölfræði sem kynnt er í þessari bók er fyrst og fremst af tvennum toga. Annars vegar reiknum við öryggisbil og hins vegar framkvæmum við tilgátupróf. Við byrjum á kafla 7 þar sem við fjöllum um ályktunartölfræði sem við framkvæmum á flokkabreytum. Að því loknu eru ályktanir um talnabreytur teknar fyrir í kafla 8. Fervikagreining er umfjöllunarefni 9. kafla en hana má einnig nota til að draga ályktanir um talnabreytur. Í 10. kafla kveður við nýjan tón þegar við skoðum línulega aðhvarfsgreiningu en markmið hennar er að kanna línulegt samband tveggja breyta. Að lokum kynnumst við tvíkosta aðhvarfsgreiningu í kafla 11.

2. kafli

Frá tilraun til gagna

Ef tölfræðileg rannsókn á að vera vel úr garði gerð er nauðsynlegt að gæta þess að ákveðin skilyrði séu uppfyllt. Þar ber helst að nefna *úrtakshögun*, *blindun* og *endurtekningar* en þessi atriði falla undir það sem tölfræðingar kalla *tilraunahögun* (experimental design).

Tilraunahögun er einn mikilvægasti þáttur hverrar rannsóknar og sé illa að henni staðið getur farið svo að rannsakendur geti ekki fylgt eftir neinum af þeim markmiðum sem þeir upphaflega settu sér. Léleg tilraunahögun getur jafnvel orsakað að rannsakendur haldi fram orsakasamböndum sem eru í raun röng.

Því miður eru fjölmörg dæmi um slíkt og oftar en ekki má skýra „furðufréttir“ af sérkennilegum útkomum rannsókna með lélegri hönnun tilraunarinnar. Ennfremur er oft ógerlegt að leiðrétta fyrir slæmri tilraunahögun. Í verstu tilfellunum eru allar mælingar ónothæfar og rannsóknin ónýt! Góðu fréttirnar eru þær að veigamestu atriðin sem hafa þarf í huga eru ekki mörg og mikilvægi þeirra er hægt að rökstyðja með einföldum dæmum.

Í þessum kafla fetum við í gegnum þau spor sem þarf að stíga frá því að tölfræðileg rannsókn er áformuð og þangað til gögn eru tilbúin til tölfræðilegrar úrvinnslu. Við byrjum á að kynnast hugtökunum *þýði* og *úrtak* í kafla 2.1 og ræðum því næst um *breytur* og ýmsar gerðir þeirra í kafla 2.2. *Bjagi* og *breytileiki* eru þau tvö meginhugtök sem torvelda okkur að draga ályktanir af tölulegum upplýsingum. Þau eru efni kafla 2.3. Meginvopn okkar í baráttunni við bjaga er *úrtakshögun*, sem verður tekin fyrir í kafla 2.4, og *blindun*, í kafla 2.5. Sé nægjanlega vel að þessum atriðum staðið er unnt að nota *stýrða tilraun* til að fullyrða um *orsakasamband* sem eru efni kafla 2.6.

2.1. Úrtak og þýði

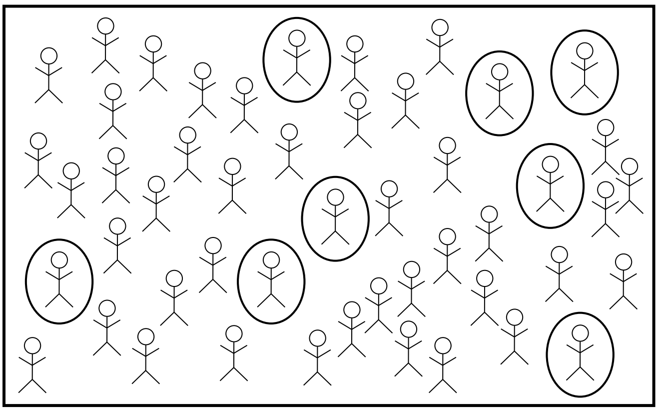
Eitt af því fyrsta sem hafa ber í huga þegar tölfræðirannsókn er fyrirhuguð er að skilgreina nákvæmlega hver viðfangsefni rannsóknarinnar eru. Það köllum við að skilgreina hvert *þýði* rannsóknarinnar er.

> **2.1. Þýði (population)**
>
> *Þýði* rannsóknar er safn allra viðfangsefna sem draga á ályktanir um.

Ef fjöldi þeirra viðfangsefna er óendanlegur segjum við að þýðið sé óendanlegt. Annars er það endanlegt. Til sumra rannsókna svarar eingöngu eitt þýði, til annarra svara mörg þýði sem við berum þá gjarnan saman. Yfirleitt er æði dýrt og stundum hreinlega ómögulegt að ætla sér að skrá mælingar hjá sérhverju viðfangsefni þýðisins. Því vinnum við nær undantekningarlaust aðeins með hluta þýðisins, sem við köllum *úrtak*.

2.2. Úrtak (sample)

Úrtak er safn viðfangsefna sem eru valin úr tilteknu þýði.



Mynd 2.1: Þýði og úrtak

Ef þýðið okkar er til dæmis allir íslenskir ríkisborgarar þá er úrtak úr því þýði safn einstaklinga með íslenskan ríkisborgararétt, það er hluti af öllum þeim sem ríkisborgararéttinn hafa. Mynd 2.1 sýnir dæmigert þýði og úrtak. Þýðið er allir karlarnir á myndinni og þeir sem búið er að draga hring um eru úrtakið. Best er ef viðfangsefnin í úrtakinu eru valin á handahófskenndan hátt en þá tölum við um *slembiúrtak*.

Hvert úrtak getur eingöngu verið úr einu þýði, en það má taka mörg úrtök úr sama þýðinu. Ef við gerum rannsókn á fleiri en einu þýði tökum við að minnsta kosti eitt úrtak úr sérhverju þýðanna.

2.2. Breytur

Þegar við höfum áttað okkur á því hvert þýði rannsóknarinnar er vaknar næsta spurning: Hvernig er best að lýsa því? Í tölfræðiúrvinnslu setjum við sérhvern eiginleika viðfangsefna okkar fram sem *breytu*.

2.3. Breyta (variable)

Breyta er ákveðinn eiginleiki sem við skráum niður eða mælum á viðfangsefnunum í úrtakinu okkar.

Stundum skráum við eingöngu eina breytu hjá hverju viðfangsefni, stundum margar. Séu viðfangsefni okkar menn gætum við til dæmis skráð niður aldur, kyn, þyngd og blóðþrýsting hjá sérhverjum einstaklingi. Þá höfum við mælingar á fjórum breytum fyrir sérhvert viðfangsefni. Breytur skiptast gróflega í tvær gerðir, *talnabreytur* og *flokkabreytur*, eftir því hvort þær taka gildi sem eru mæld í tölulegum einingum eða ekki.

2.4. Flokkabreytur (categorical variables)

Flokkabreytur (categorical variables) eru ekki mældar í tölulegum einingum, heldur segja, eins og nafnið gefur til kynna, til um það hvaða flokki viðfangsefnið tilheyrir.

Dæmi um flokkabreytur sem lýsa einstaklingum eru kyn, hæsta prófgráða sem viðkomandi hefur lokið, póstnúmer lögheimilis og hvort einstaklingurinn reyki eða sé reyklaus. Gildin sem flokkabreyta getur tekið eru oft kölluð *flokkar* hennar.

2.5. Röðuð flokkabreyta (ordinal categorical variable)

Þegar flokkabreyta er *röðuð* (ordinal categorical variable) er flokkum hennar raðað í stærðarröð.

2.6. Óröðuð flokkabreyta (categorical variable)

Þegar flokkabreyta er *óröðuð* (categorical variable) er flokkum hennar ekki raðað í stærðarröð.

Kyn er gott dæmi um óraðaða flokkabreytu, þar sem ekki er eðlilegt að tala um hversu mikið einstaklingar hafi af kyni og að sama skapi er kynjunum ekki raðað í stærðarröð. Annað dæmi um óraðaða flokkabreytu væri breytan hárlitur sem hefði flokkana ljóst, dökkt og rautt. Breytan hæsta prófgráða er hins vegar gott dæmi um raðaða flokkabreytu. Algengt er að breytan hafi flokkana grunnskólapróf, stúdentspróf/iðnnám, BS/BA-próf, MS/MA-próf og að lokum doktorsgráða. Þar hefur einstaklingur með

MA-gráðu lokið hærri prófgráðu heldur en einstaklingur með BA-gráðu og með því móti er flokkunum raðað í stærðarröð.

2.7. Talnabreytur (numerical variables)

Talnabreytur (numerical variables) taka töluleg gildi sem eru mæld í tilteknum einingum.

Talnabreytur eru frábrugðnar flokkabreytum að því leyti að þær taka ætíð töluleg gildi sem eru mæld í tilteknum einingum. Dæmi um talnabreytur sem lýsa einstaklingum eru aldur (mældur í árum), hæð (mæld í cm), þyngd (mæld í kg) og púls (mæld í slögum á mínútu). Talnabreytum er sömuleiðis skipt upp í tvær gerðir, eftir því hvort þær eru *samfelldar* eða *strjálar*.

2.8. Samfelldar breytur (continuous variables)

Þegar talnabreyta getur tekið hvaða gildi sem er á einhverju bili þá segjum við að hún sé *samfelld*. Eingöngu talnabreytur geta verið samfelldar.

Sem dæmi um samfelldar breytur má nefna hárlengd, þyngd, líftíma og hitastig. Lengd á einu mannshári getur verið 20 cm. Hún getur líka verið 21 cm, 20.8, 20.4 cm eða hvaða tala sem er á milli 20 cm og 21 cm. Einu skorðurnar eru nákvæmni mælitækjanna okkar.

2.9. Strjálar breytur (Discrete variables)

Ef breytur eru ekki samfelldar segjum við að þær séu *strjálar*. Allar flokkabreytur eru strjálar og sumar talnabreytur.

Dæmi um strjálar talnabreytur eru til dæmis fjöldi eggja í hreiðri, gildi sem kemur upp í teningakasti og heildarfjöldi marka sem skoruð eru í knattspyrnuleik.

Sumar strjálar breytur geta tekið gífurlega mörg gildi. Hugsum okkur sem dæmi fjölda bíla í mismunandi löndum. Það er breyta sem getur tekið fjölmörg gildi, á mjög breiðu bili, en fjöldinn er samt alltaf heil tala. Því getur breytan ekki tekið hvaða gildi sem er á einhverju bili. Það er ekkert land með 1684927.4 bíla. Tölfræðiúrvinnsla á strjálum talnabreytum sem taka mjög mörg gildi getur verið snúin. Því er oft farin önnur af tveimur leiðum, að skipta breytunni upp í raðaða flokkabreytu eða þá að beita þeirri nálgun að líta á hana sem samfellda talnabreytu.

Að gefnu tilefni viljum við brýna muninn á strjálum talnabreytum og flokkabreytum sem taka töluleg gildi. Stundum eru flokkabreytur kóðaðar með tölum eins og til dæmis flokkabreytan póstnúmer lögheimils einstaklings. Þá er hætt við að þeim sé ruglað við strjálar talnabreytur. Góð leið til að forðast slíkan rugling er að skoða nánar mælieininginuna sem breytan er mæld í. Þegar breyta er talnabreyta hafa einingarnar sem hún er mæld í einhverja merkingu. Viðfangsefni sem hlýtur mælinguna 2 á tiltekinni breytu hefur tvöfalt meira af þeirri breytu en viðfangsefni með mælinguna 1. Þannig hefur tveggja ára barn lifað tvöfalt lengur en ársgamalt barn. Það er fráleitt að tala svo um flokkabreytuna póstnúmer, sem þó er kóðuð með tölum. Póstnúmerið 220 (Hafnarfjörður) er ekki það sama og tvöfalt magn af póstnúmerinu 110 (Árbær). Það er líka rangt að segja að sá sem býr í Árbæ hafi minna af póstnúmeri en sá sem býr í Hafnarfirði, þó talan 110 sé minni en talan 220. Tölulega gildið er flokkunartæki.

Þegar viðfangsefnunum er lýst með fleiri en einni breytu getum við stundum skipt breytunum upp í *svarbreytur* og *skýribreytur*.

2.10. Svarbreytur og skýribreytur (response and explanatory variables)

Fyrir sérhvert viðfangsefni mun gildi *skýribreytu* þess hafa áhrif á það hvaða gildi *svarbreytan* mun taka. Til einnar svarbreytu geta svarað margar skýribreytur sem hafa áhrif á hana.

Hugsum okkur að verið sé að kanna áhrif saltlakkríss á blóðþrýsting. Fólk borðar mismikið magn af saltlakkrís og eftir klukkutíma er blóðþrýstingur þeirra mældur og munurinn kannaður. Þetta er skýrt dæmi um svarbreytu og skýribreytu. Við teljum að blóðþrýstingurinn, sem er svarbreytan, breytist eftir því sem magn skýribreytunnar saltlakkríss breytist. Takið eftir að gildi skýribreytu hafa áhrif á gildi svarbreytunnar, en ekki öfugt. Hár blóðþrýstingur lætur okkur ekki borða mikinn saltlakkrís, það er saltlakkrísinn sem veldur háum blóðþrýstingi. Þessi munur verður mikilvægur þegar við fjöllum um orsakasambönd seinna í kaflanum og aftur þegar við kynnumst aðhvarfsgreiningu í kafla 10.

2.2.1. Nýjar breytur búnar til

Oft getur verið gagnlegt að nota mælingarnar okkar til að búa til nýjar breytur í gagnasafnið. Það má gera á ýmsa vegu. Þegar unnið er með talnabreytur gætum viljum við sem dæmi oft skipta um einingu á breytunni okkar, eins og þegar lengdir eru mældar í tommum en við viljum vinna með lengdir í sentimetrum. Við gætum líka viljað beita formúlum á eina eða fleiri talnabreytu til þess að búa til nýja breytu, eins og þegar hæð og þyngd er notuð til að reikna líkamsþyngdarstuðul (BMI).

Þegar unnið er með flokkabreytur er algengt að flokkabreytan sé óþarflega fínskipt. Dæmi um slíkt væri ef við hefðum spurt hvert póstnúmer einstaklings væri en okkur nægði í raun að vita í hvaða sveitarfélagi hann byggi. Þá er okkur óhætt að búa til nýja breytu þar em við sameinum alla flokka sem tilheyra saman sveitafélaginu. Sú breyta lýsir þá sveitarfélagi en ekki póstnúmeri.

Að lokum eru flokkabreytur einnig búnar til með því að beita skilyrðum á eina eða fleiri talnabreytu eða flokkabreytu. Sem dæmi þá skilgreinir alþjóðaheilbrigðismálastofnunin (WHO) einstakling með háþrýsting ef að annað hvort slagbilsþrýstingur er yfir 140 mm Hg og/eða lagbilsþrýstingur er yfr 90 mm Hg. Við gætum viljað nota mælingar á talnabreytunum slagbilsþrýstingur og lagbilsþrýstingur til að búa til nýja flokkabreytu, háþrýstingur sem segir til um hvort einstaklingur er með háþrýsting eða ekki.

2.3. Bjagi og breytileiki

Tölfræðilega eru tvö meginatriði sem torvalda okkur að meta eðli þeirra breyta sem við erum að kanna. Þau eru *bjagi* og *breytileiki* mælinganna, sjá mynd 2.3.

2.11. Breytileiki (variability)

Breytileiki verður vegna þess að breyturnar sem við erum að skoða eru slembni háðar og því geta útkomur mælinganna breyst í hvert sinn sem tilraunin er framkvæmd.

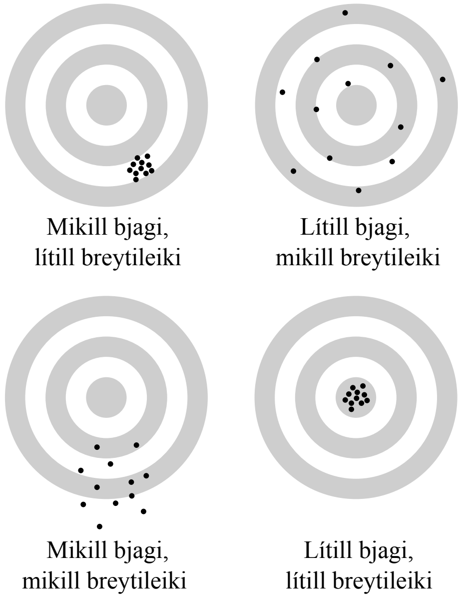
Við beitum tölfræði vegna þess að mælingarnar sem við skoðum eru alltaf háðar einhverri *slembni* (randomness). Slembnin getur átt sér ýmsar orsakir. Algengasta orsökin er sú að við vinnum með úrtök en ekki allt þýðið. Það er slembið hvaða viðfangsefni veljast í úrtakið hverju sinni sem veldur því að niðurstöðurnar geta breyst í hvert sinn sem nýtt úrtak er valið og rannsóknin endurtekin.

Þeim meiri breytileika sem mælingar hafa, þeim erfiðara er að átta sig á þeim lögmálum sem þær lúta. Breytileiki mælinga er bundinn eðli þeirra viðfangsefna sem verið er að skoða og við höfum engar leiðir til að minnka hann. Hins vegar gera endurtekningar okkur kleift að fá skýrari mynd af þeirri reglu sem mælingarnar fylgja. Ef við framkvæmum mælingu á eingöngu einu viðfangsefni er engin leið fyrir okkur að meta hversu stór sá breytileiki er. Um leið og við höfum mælingu á fleiri en einu viðfangsefni, það er *endurtekningu*, höfum við einhverja hugmynd um það á hvaða bili mælingarnar geta legið. Því fleiri endurtekningar, því betur vitum við hversu breytilegar mælingarnar geta verið. Þessi breytileiki er lykilatriði í allri ályktunartölfræði, sem er stærsti hluti þeirrar tölfræði sem þessi bók fjallar um.

2.12. Bjagi (bias)

Bjagi verður þegar aðferðirnar gefa markvisst bjagaða mynd af þýðinu sem verið er að skoða.

Bjagi er í eðli sínu gerólíkur breytileika. Á meðan breytileiki er bundinn í eðli mælinganna og þannig á vissan hátt „sannur” í eðli sínu, veldur bjagi því að við fáum kerfisbundið skakka mynd af viðfangsefnunum sem við erum að skoða og því viljum við lágmarka hann með öllum ráðum. Sá bjagi sem við munum fjalla um getur átt sér tvennar orsakir. Annars vegar verður hann þegar viðfangsefnin í úrtakinu eru valin á kerfisbundið bjagaðan hátt. Þá er talað um *úrtaksbjaga*. Úrtakshögun snýr að því að lágmarka úrtaksbjaga og er hún viðfangsefni kafla 2.4. Hins vegar geta væntingar bæði rannsakanda og viðfangsefna valdið kerfisbundið bjöguðum mælingum. Þá er um *rannsakandabjaga* og *lyfleysuáhrif* að ræða. *Blindun* er notuð til að lágmarka þann bjaga og er hún viðfangsefni kafla 2.5.



Mynd 2.2: Bjagi og breytileiki

2.4. Úrtakshögun

Fyrsta viðfangsefni tilraunahögunar sem við tökum fyrir er *úrtakshögun* (sampling). *Úrtakshögun* snýr bæði að því hvernig úrtak er valið úr þýði en einnig hvaða viðfangsefnum er úthlutað hvaða inngrip. Markmið úrtakshögunar er ætíð það sama fyrir allar gerðir rannsókna, að lágmarka *úrtaksbjaga* (sampling bias).

> **2.13. Úrtaksbjagi (Sampling bias)**
>
> *Úrtaksbjagi* verður þegar ákveðin viðfangsefni þýðis eru líklegri til að vera valin í úrtak heldur en önnur.

Því meiri sem úrtaksbjaginn er því verr endurspeglar úrtakið þýðið. Sé bjaginn of mikill verður ekki hægt að álykta um þýðið út frá úrtakinu og því engin ályktunartölfræði möguleg! Besta leiðin til að forðast úrtaksbjaga er að velja slembiúrtak, því slembiúrtök eru laus við bjaga. Athugið að séum við að framkvæma tilraun þar sem viðfangsefnum er skipt í hópa sem hljóta ólík inngrip þurfum við ekki eingöngu að gæta þess hvernig úrtakið er valið heldur einnig að gæta þess hvernig viðfangsefnum er skipt upp í hópa.

2.14. Slembival (Randomization)

Það að velja slembið, eða *slembival*, þýðir að velja handahófskennt þannig að öll viðfangsefni eru jafnlíkleg til að vera valin.

Úrtak sem er valið með slembivali kallast *slembiúrtak* (random sample). Við munum fjalla um þrjár gerðir af slembiúrtökum: *einfalt slembiúrtak*, *lagskipt slembiúrtak* og *parað slembiúrtak*.

2.4.1. Einfalt og lagskipt slembiúrtak

2.15. Einfalt slembiúrtak (simple random sample)

Þegar við framkvæmum *einfalt slembiúrtak* veljum við einstaklinga af handahófi úr öllu þýðinu.

2.16. Lagskipt slembiúrtak (stratified random sample)

Þegar við framkvæmum *lagskipt slembiúrtak* er þýðinu fyrst skipt niður í nokkur lög eða hópa og síðan eru viðfangsefni valin með einföldu slembiúrtaki úr hverju lagi fyrir sig. Fjöldi viðfangsefna sem valinn er úr hverju lagi verður að vera ákveðinn fyrirfram en hann má vera mismikill eftir lögum.

Lagskipting getur komið að góðum notum þegar verið er að rannsaka fyrirbæri þar sem utanaðkomandi breytur, aðrar en þær sem ætlunin er að rannsaka, hafa áhrif á mælingarnar á viðfangsefnunum. Dæmi um slíkt væri ef bera ætti orkuinnihald í matarræði saman við ákefð hreyfingar Íslendinga. Orkuþörf og þar af leiðandi orkuinnihald í mat er ólík eftir kynjunum og því myndum við fá skýrari mynd af sambandi orkuneyslu og hreyfingar ef við hefðum jafnt kynjahlutfall í mælingunum okkar. Það myndum við gera með því að velja lagskipt slembiúrtak, t.d. 20 karlmenn af handahófi og 20 konur af handahófi og bera saman orkuneyslu og hreyfingu hjá þeim hóp. Lagskipt slembiúrtak getur einnig verið afar gagnlegt þegar viðfangsefnin skiptast niður í svo misstóra hópa að ef við myndum velja einfalt slembiúrtak úr öllum lögunum væri hætta á að velja sárafá eða engin viðfangsefni úr minnstu hópunum.

Hugsum okkur til dæmis að við vildum kanna mun á árstekjum eftir sveitarfélögum. Ef við veldum fólk af handahófi úr þjóðskrá myndu gróflega 2/3 viðfangsefnanna koma af höfuðborgarsvæðinu. Því myndum við heldur kjósa að velja af handahófi úr hverju sveitarfélagi fyrir sig. Takið þó vel eftir því að það má alls ekki slaka á kröfunum um að velja slembið úr hverjum hópi fyrir sig sem í þessu tilviki eru sveitarfélögin.

2.4.2. Parað slembiúrtak

2.17. Parað slembiúrtak (paired random sample)

Parað slembiúrtak fæst þegar viðfangsefnin í þýðinu eru pöruð saman tvö og tvö og síðan er ákveðinn fjöldi para valinn af handahófi í úrtakið.

Paraðar mælingar koma líkt og lagskipt slembiúrtök að góðum notum þegar mælingarnar okkar eru mjög breytilegar vegna áhrifa utanaðkomandi breyta, annarra en þeirra sem ætlunin var að rannsaka. Sér í lagi eru paraðar mælingar vinsælar þegar slíkar utanaðkomandi breytur eru mjög margar og jafnvel erfitt að festa hönd á þær. Sú er oft raunin þegar verið er að rannsaka fólk og aðrar flóknar lífverur.

Með pöruðu slembiúrtaki lágmörkum við áhrif utanaðkomandi breyta með því að para saman viðfangsefni sem hafa mjög lík eða sömu gildi á utanaðkomandi breytum. Raunverulega mælingin sem við höfum þá áhuga á að skoða er mismunur mælinganna hjá hverju og einu pari. Stundum eru viðfangsefnin jafnvel pöruð við sig sjálf. Þá er til dæmis fyrst framkvæmd mæling án inngrips og síðan önnur mæling að inngripi loknu og þær tvær mælingar paraðar saman, ef slíkt er við hæfi.

Hugsum okkur að við höfum tvær gerðir af hlaupaskóm og viljum kanna hvort þær hafi mismikil áhrif á hlaupahraða. Við gætum valið af handahófi tvo hópa af fólki, látið annan hópinn hlaupa kílómeter í einni gerðinni og hinn hópinn hlaupa sömu vegalengd í hinni gerðinni. Að því loknu myndum við kanna muninn á meðaltíma hópanna tveggja. Slíkt væri dæmi um óparaðar mælingar og þá myndum við líta á hópana tvo sem sitt hvort úrtakið, hvort úr sínu þýði. Vandamál þeirrar aðferðar er að hlaupahraði fólks er mjög breytilegur og því gæti þurft mikinn fjölda einstaklinga í hvorn hóp til að meta með góðu móti þann mun sem má rekja til hlaupaskónna en ekki annarra utanaðkomandi þátta. Við gætum einnig framkvæmt sömu tilraun með pöruðum mælingum. Þá myndi hver hlaupari hlaupa kílómeterinn tvisvar, eina ferð í hvoru pari, og að lokum væri munurinn á hlaupahraða hvers einstaklings reiknaður. Að vísu gæti tíminn í fyrri ferðinni verið betri, vegna þess að þá væri hlauparinn óþreyttur en þann bjaga má leiðrétta með því að láta helming hlauparanna hlaupa fyrst í annarri gerðinni en hinn helminginn hlaupa fyrst í hinni gerðinni. Með þessu móti hverfur sá breytileiki í mælingunum sem rekja má til ólíkrar hlaupagetu viðfangsefnanna og því þarf ekki eins stórt úrtak til að fá skýra mynd af áhrifum hlaupaskónna.

Við munum fjalla nánar um paraðar mælingar og ályktanir um mun á meðaltölum þeirra í kafla 8.2.3.

2.4.3. Hvað ef slembiúrtak er ógerlegt?

Stundum valda erfiðleikar í framkvæmd því að við getum ómögulega valið slembiúrtak úr þýði. Þá er farin önnur af tveimur leiðum:

1. Að skilgreina þýðið upp á nýtt þannig að úrtakið verði slembiúrtak.

   Dæmi um slíkt væri að skilgreina þýði Íslendinga sem eru skráðir í símaskrána í stað þýðis allra Íslendinga. Vandamálið við þá aðferð er það að þá eiga ályktanir okkar eingöngu við um þá Íslendinga sem eru skráðir í símaskrána sem er ef til vill ekki það sem við viljum.

2. Að sætta sig við bjagann.

   Þá þurfum við að gera grein fyrir úrtaksbjaganum í umfjöllun okkar og ræða ítarlega hvaða afleiðingar hann getur haft í för með sér. Stundum getum við leyft okkur að gera ráð fyrir því að bjaginn sé léttvægur með tilliti til þess sem við erum að rannsaka. Þá getur verið meira viðeigandi að sætta sig við bjagann heldur en að skilgreina þýðið upp á nýtt.

Hugsum okkur að við viljum kanna stafakunnáttu 4 ára barna á Íslandi. Ein leið til þess væri að velja slembiúrtak leikskólabarna. Vissulega eru ekki öll 4 ára börn í leikskólum, svo úrtakið verður bjagað. Við gætum sagt sem svo að þýðið sé eingöngu leikskólabörn á Íslandi. Hin leiðin væri sú að tiltaka að undantekningarnar séu svo fáar, langflest 4 ára börn eru í leikskóla svo við getum fært rök fyrir því að bjaginn verði ekki mikill.

2.4.4. Algengar úrtaksaðferðir sem ekki eru slembiúrtök

Sjálfboðaliðaúrtök (voluntary response sampling) og *aðgengisúrtök* (convenience sampling) eru tvö dæmi um úrtaksaðferðir sem gefa ekki slembiúrtök en eru þó mikið notaðar.

Sjálboðaliðaúrtök eiga við þegar viðfangsefnin eru fólk og þá eru eingöngu framkvæmdar mælingar á þeim sem bjóða sig fram til þess. Hér verður úrtaksbjagi vegna þess að ákveðin viðfangsefni geta verið líklegri til að bjóða sig fram en önnur. Oft getur sá bjagi orðið svo mikill að lítið er hægt að álykta út frá þeim mælingum sem fengnar eru.

19. október 2010 var spurt í Reykjavík síðdegis: „Hversu sammála eða ósammála ertu að banna þjóðkirkjunni aðgang að grunn- og leikskólum? “ Könnunin er dæmigerð „netkönnun“, hýst á léninu visir.is en allir lesendur vefsíðunnar geta svarað spurningunni. Slíkar netkannanir eru klassískt dæmi um sjálfboðaliðaúrtök og eru stórkostlega

bjagaðar. Í fyrsta lagi sjá eingöngu lesendur síðunnar spurninguna og þeir eru svo sannarlega ekki slembiúrtak úr þjóðinni. Í öðru lagi svara lesendur yfirleitt eingöngu spurningum sem höfða til þeirra. Í þessu tiltekna dæmi er sennilegt að áhugafólk um trúmál vilji koma skoðun sinni á framfæri sem og kennarar og foreldrar barna.

Aðgengisúrtök eru fengin þegar eingöngu eru framkvæmdar mælingar á þeim viðfangsefnum sem eru (þægilega) aðgengileg rannsakendum. Þar verður úrtaksbjagi vegna þess að ákveðin viðfangsefni þýðisins eru líklegri til að vera aðgengileg rannsakendum en önnur. Sá bjagi getur verið mikill og valdið því að ekki er hægt að draga ályktanir út frá fengnum mælingum.

Dæmi um slíkt væri að velja í úrtak vegfarendur í Kringlunni frá klukkan 17 til 19 á fimmtudegi. Slíkt þýði er augljóslega bjagað. Í því eru væntanlega að megninu til íbúar í nærliggjandi hverfum sem ekki vinna á kvöldin og svo mætti lengi telja. Að minnsta kosti er ljóst að slíkt úrtak getur ekki verið lýsandi fyrir alla Íslendinga.

2.4.5. Vöntun mælinga

2.18. Vöntun mælinga (missing values)

Ef ekki tekst að framkvæma mælingu á öllum þeim viðfangsefnunum sem hafa verið valin í úrtak er sagt að það *vanti mælingu* fyrir viðkomandi viðfangsefni.

Vöntun mælinga snýr því ekki að því hvernig úrtak er valið og ætti því strangt til tekið ekki að eiga heima í kafla um úrtakshögun. Hins vegar má oft sjá rannsóknir þar sem vöntun mælinga er mjög mikil, jafnvel vantar upp undir helming allra mælinga. Þá má ekki framkvæma tölfræðiúrvinnslu eingöngu á þeim viðfangsefnum sem hægt var að framkvæma mælingar á, eins og ekkert hefði í skorist, því það er í raun sambærilegt því að minnka úrtakið eftir á. Það getur verið stórkostlega vafasamt því oft er líklegra að það vanti frekar mælingar hjá ákveðnum viðfangsefnum heldur en öðrum og þá er um leið líklegra að þau viðfangsefni lendi ekki í minnkaða „úrtakinu“ sem veldur úrtaksbjaga!

Það er til dæmis vel þekkt að kjósendur eru ekki allir búnir að gera upp hug sinn, eða tilbúnir til að gefa upp afstöðu sína, nokkrum dögum fyrir þingkosningar og að atkvæði þeirra skiptast öðruvísi heldur en atkvæði annarra kjósenda. Þetta útskýrir að miklu leyti þann mun sem ætíð má finna í skoðanakönnunum fyrir kosningar og svo kosningaúrslitunum sjálfum. Að sjálfsögðu má tína til aðra þætti en þeir verða ekki tíundaðir hér.

2.5. Blindun

Þegar við framkvæmum tilraun viljum við geta tryggt að sjáist munur á mælingunum okkar megi rekja hann til inngripanna sem við beitum en ekki annarra utanaðkomandi áhrifa. Þið hafið nú séð hvernig val á viðfangsefnum í úrtök getur valdið bjaga ef ekki er nægilega vel að gætt. Þann bjaga kölluðum við *úrtaksbjaga*.

Nú munum við áfram fjalla um atriði sem bjaga mælingar en nú eiga þau sér aðrar orsakir. Annars vegar verður bjaginn vegna þess að rannsakandinn býst við því að sjá mismunandi niðurstöður eftir því hvaða inngripum er beitt. Hins vegar vegna þess að viðfangsefnin geta sýnt mun í mælingum vegna þess að þau telja að inngripið hafi áhrif á þann eiginleika sem verið er að mæla. Yfirleitt valda báðir þessir bjagar því að meiri áhrif mælast af beitingu inngrips en raunverulega eru. Í slæmum tilvikum orsakar það að rannsakendur draga ranglega ályktanir um ágæti gagnslausra inngripa.

2.5.1. Rannsakandabjagi og lyfleysuáhrif

2.19. Rannsakandabjagi (experimenters bias)

Rannsakandabjagi verður þegar væntingar rannsakanda um áhrif inngrips hafa áhrif á mælingarnar á viðfangsefnunum.

Rannsakandabjagi getur komið til á bæði beina og óbeina vegu. Bein áhrif verða þegar væntingar rannsakanda valda bjaga í því hvernig hann skráir niður mælingarnar. Óbein áhrif verða þegar væntingar rannsakandans valda breytingum á viðfangsefninu sjálfu. Sem dæmi um bein áhrif má nefna að búist rannsakandi við lágum mælingum gæti hann frekar lesið að málband sýni 15.4 cm en 15.5 cm þegar mælingin er nákvæmlega mitt á milli. Sem dæmi um óbein áhrif gæti rannsakandi átt erfitt með að leyna undrun sinni þegar svör viðmælenda (sem væru þá mælingarnar) eru í mótsögn við kenningar rannsakandans. Viðmælandinn gæti skynjað þá undrun og því ósjálfrátt efast um svör sín og jafnvel breytt þeim, eða öðrum sem á eftir fylgja.

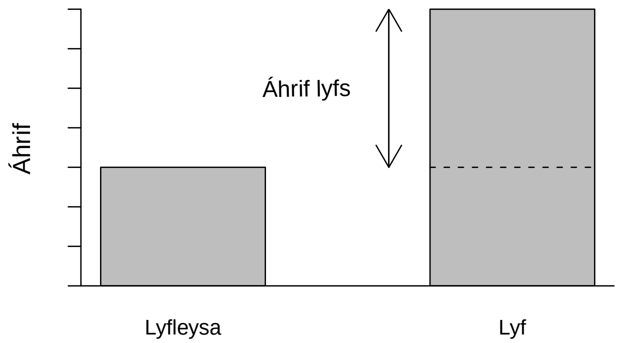
Þrátt fyrir að rannsakandinn sjálfur valdi rannsakandabjaga á mælingunum, má alls ekki skilja sem svo að munurinn í mælingunum komi til vegna ásetnings rannsakandans. Að sjálfsögðu göngum við út frá því að sérhver rannsakandi vilji vanda gerð rannsóknar sinnar sem mest hann má og forðast allt það sem gæti bjagað niðurstöðurnar. Rannsakandabjagi er því ekki ætlunarverk rannsakanda heldur óhjákvæmileg afleiðing og ekkert annað en góð tilraunahögun getur komið í veg fyrir hann. Það er að rannsakandinn viti ekki hvort viðfangsefnið hafi hlotið inngrip eða ekki.

Væntingar rannsakandans eru ekki einar um að geta valdið bjöguðum niðurstöðum, væntingar viðfangsefnanna geta sömuleiðis haft mikil áhrif á útkomur mælinga. Góð leið til að komast hjá þeim bjaga er að nota lyfleysur.

2.20. Lyfleysa (placebo)

Lyfleysa er sérhvert inngrip sem viðfangsefni telur ranglega að sé inngripið sem mæla á.

Lyfleysa getur verið hveititafla í stað blóðþrýstingslyfs, „nikótínplástur“ með engu



Mynd 2.3: Lyfleysuáhrif

nikótíni, „gerviheilun“, það er að segja hvað eina sem viðfangsefnið getur ekki greint mun á hvort sé „alvöru“ inngrip - eða plat!

2.21. Lyfleysuáhrif (placebo effect)

Þann mun í mælingum viðfangsefna sem við sjáum fyrir og eftir lyfleysuinngrip köllum við *lyfleysuáhrif*.

Hugsum okkur hóp fólks sem þjáist af höfuðverk. Hópnum er skipt í tvennt og öðrum hópnum gefið virkt höfuðverkjalyf en hinum hópnum gefin lyfleysa. Fólkið er svo beðið um að meta hversu mikið höfuðverkurinn batnaði við inntöku. Munur á höfuðverk fyrir og eftir að lyfleysan er gefin eru lyfleysuáhrif.

Yfirleitt eru rannsóknir framkvæmdar með það fyrir augum að staðfesta að tilteknir eiginleikar inngrips hafi merkjanleg áhrif á ákveðna eiginleika viðfangsefnanna. Í dæminu hér að ofan væri markmiðið að sýna að virku efnin í höfuðverkjalyfinu hafi merkjanleg áhrif á höfuðverk hjá viðkomandi einstaklingum. Takið eftir því að bæði hópurinn sem fékk lyfið og sá sem fékk lyfleysuna verða fyrir lyfleysuáhrifum. Það er báðir hóparnir töldu sig vera að hljóta tiltekið inngrip og trú þeirra á að inngripið virki hafði áhrif á matið sem fékkst. Sá munur sem skýrist með virku efnunum í lyfjunum er því eingöngu **munurinn** á hópunum tveimur eftir að inngripinu var beitt, sjá mynd 2.3. Því er þess krafist af lyfjum að þau sýni virkni umfram lyfleysuáhrif.

Mörgum gæti þótt það smámunasemi að þurfa að leiðrétta fyrir lyfleysuáhrifum, enda ætla margir að þau áhrif séu hér um bil hverfandi. Því er síður en svo farið og eru smáskammtalækningar (hómópatía) ágætt dæmi. Smáskammtalækningar hafa ávallt verið mjög umdeildar og hafa fjölmargar rannsóknir sýnt fram á að áhrif þeirra séu engu meiri en lyfleysuáhrif [1]. Neðri deild breska þingsins hefur í því tilliti lýst því yfir

[1] Shang, A., Huwiler-Muntener, K., Nartey, L., Juni, P., Dorig, S., Sterne, J. A. og fleiri. 2005. „Are

að flokka skuli smáskammtalækningar sem lyfleysuinngrip [2]. Þrátt fyrir það starfar fjöldi manns við smáskammtalækningar hér á landi sem og annars staðar í heiminum.

Athugið einnig að notkun lyfleysu er eitt og sér ekki nægjanlegt skilyrði til að sýna fram á virkni inngripa heldur þarf tilraunin einnig að uppfylla ákveðnar kröfur um úrtakshögun sem þið kynntust í kafla 2.4 og nægjanlegan fjölda endurtekinna mælinga. Þessi skilyrði verða tekin saman í kafla 2.6.

2.5.2. Einblindar og tvíblindar rannsóknir

Þar sem rannsakandabjagi og lyfleysuáhrif geta verið töluverð, flokkum við tilraunir eftir því hvort gerðar eru ráðstafanir til að lágmarka þann bjaga. Þeir tveir flokkar sem notaðir eru kallast annars vegar *einblindar rannsóknir* og hins vegar *tvíblindar rannsóknir*.

2.22. Tvíblindar rannsóknir (double-blind trials)

Þegar rannsókn er *tvíblind* vita hvorki rannsakandi né viðfangsefni tilraunarinnar hvaða inngrip hvert viðfangsefni hlýtur. Athugið að inngrip getur verið lyfleysuinngrip.

Með öðrum orðum eru bæði rannsakandinn og viðfangsefnið blind á það hvaða inngripi var beitt í hverju tilviki. Stundum verðum við að sætta okkur við að ekki sé hægt að dylja það fyrir rannsakandanum hvaða inngripi var beitt, það sé til dæmis augljóst í hverju tilviki. Þá er tvíblind rannsókn ekki möguleg en hins vegar væri hægt að framkvæma *einblinda rannsókn*.

2.23. Einblindar rannsóknir (single-blind trials)

Þegar rannsókn er *einblind* vita annað hvort viðfangsefnin eða rannsakandinn ekki hvaða inngripi er beitt.

2.6. Orsakasamband

Tölfræðilegar rannsóknir geta verið af ýmsum toga. Ein mikilvæg gerð rannsókna er *stýrð tilraun*.

---

the clinical effects of homoeopathy placebo effects? Comparative study of placebo-controlled trials of homoeopathy and allopathy“, *Lancet*, 366: 726–732.

[2] House of Commons Science and Technology Committee. „Evidence Check 2: Homeopathy Fourth Report of Session 2009–10“.

2.24. Stýrð tilraun (Controlled experiment)

Til að rannsókn geti flokkast sem stýrð tilraun þurfa tvö atriði að vera til staðar:

1. Rannsakandinn getur stýrt því hvaða viðfangsefni hljóta hvaða inngrip.
2. Mælingar eru framkvæmdar á viðfangsefnum bæði fyrir og eftir að inngripinu er beitt.

Ímyndum okkur að við ætlum að kanna samband reykinga og líkamsþyngdar með því að framkvæma mælingar á 100 viðfangsefnum sem væri skipt í tvo jafnstóra hópa. Ein aðferð væri að velja af handahófi 50 reykingamenn og 50 reyklausa einstaklinga og mæla líkamsþyngd þeirra. Sú aðferð myndi þó ekki flokkast undir stýrða tilraun. Dæmi um stýrða tilraun væri að velja 100 reyklausa einstaklinga og mæla líkamsþyngd þeirra. Velja síðan 50 þeirra af handahófi og láta þá reykja einn pakka af sígarettum á dag á meðan hinir 50 myndu ekki reykja. Að ári liðnu yrði líkamsþyngd beggja hópa könnuð aftur.

Ef við höfum framkvæmt stýrða tilraun stjórnum við því alfarið hvaða inngrip viðfangsefnin hljóta en mælingin er ekki framkvæmd fyrr en eftir að við höfum tekið þá ákvörðun. Því eru mælingarnar ætíð svarbreytur en inngripin skýribreytur. Inngripin geta haft áhrif á mælingarnar en ekki öfugt.

2.25. Hvaða skilyrði ætti stýrð tilraun að uppfylla?

Sérhver rannsakandi ætti að leitast við að tilraun hans uppfylli eftirfarandi skilyrði:

1. Úrtakshögun.

   Viðfangsefni eru valin úr þýðinu með slembiúrtaki og/eða skipt í hópa með slembivali.
2. Blindun.

   Rannsóknin er tvíblind en einblind ef því verður ekki komið við.
3. Endurtekningar.

   Inngripinu er beitt á endurtekinn fjölda viðfangsefna.

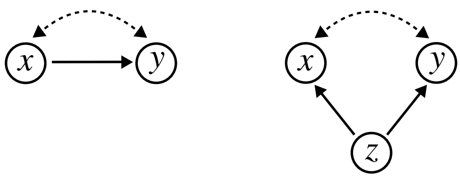
Markmið margra rannsókna er að geta fullyrt hvaða áhrif tiltekin inngrip hafa á viðfangsefnin okkar. Uppfylli stýrð tilraun skilyrðin í kassa 2.25 verður sá munur sem greinist á mælingunum eingöngu skýrður með inngripunum sem beitt var en ekki öðrum utanaðkomandi áhrifum. Þannig er hægt að fullyrða að tilteknu inngripin hafi valdið þeim mun á eiginleika viðfangsefnanna sem mældur var. Það getum við orðað sem svo að við getum fullyrt um *orsakasamband* inngripanna á þær breytur sem við mælum hjá viðfangsefnunum okkar.

2.26. Orsakasamband (causation)

Orsakasamband milli tveggja breyta er þegar gildi einnar breytu hefur áhrif á þau gildi sem önnur breyta mun taka. Eingöngu verður sýnt fram á orsakasamband með stýrðum tilraunum.

Skýrt dæmi um samband, sem þó er ekki orsakasamband, er samband milli drukknana og íssölu á Benidorm. Einstaklingur er ekki líklegri til að drukkna í sjónum þótt hann hafi borðað ís fyrr um daginn. Þó drukkna fleiri þá daga sem íssala er mikil en þegar íssala er lítil. Ástæðan er einfaldlega sú að þegar hlýtt er úti flykkist fólk á ströndina, þar sem það getur drukknað. Þá daga selst jafnframt mikið af ís. Á köldum dögum er enginn í sjónum og því lítill möguleiki á að drukkna. Þá daga selst minna af ís.

Mynd 2.6 lýsir sambandi tveggja breyta, x og y. Vinstra megin á myndinni er orsakasamband milli breytanna en ekki á myndinni hægra megin. Myndin hægra megin lýsir dæminu hér að ofan þar sem x og y eru drukknanir og ísát en z er hitastig.



Mynd 2.4: Orsakasamband

Dæmi

Dæmi 2.1
Birgir er mikill listakokkur og almennur áhugamaður um matarvenjur Íslendinga. Hann framkvæmir könnun þar sem hann velur handahófskennt úrtak 20 manna og 20 kvenna og spyr þau hversu oft í viku þau borði heitan mat í hádeginu. Birgir listakokkur skráir mælinguna 1 hjá tilteknu viðfangsefni ef það borðar heitan hádegismat einu sinni í viku, 2 ef það borðar heitan mat tvisvar í viku og svo framvegis. Að hámarki skráir hann mælinguna 7 ef viðfangsefnin borða heitan hádegismat alla daga vikunnar.

a) Er breytan sem Birgir skráir talnabreyta eða flokkabreyta?

b) Er breytan sem Birgir skráir samfelld eða strjál?

Dæmi 2.2
Hverjar af eftirtöldum breytum eru samfelldar og hverjar eru strjálar?

a) Fjöldi eggja í andahreiðrum við Tjörnina.

b) Stjörnumerki nemenda í Vogaskóla

c) Fjöldi alþingismanna sem eiga jeppa.

d) Lengd höfuðhára á nýfæddum börnum.

e) Þyngd jólatrjáa sem seld eru hjá Flugbjörgunarsveitinni.

Dæmi 2.3
Heiða Dóra kannar hvort samband sé á milli skulda einstaklinga og fæðingarmánaða þeirra. Hún skoðar skuldastöðu 100 handahófsvaldra einstaklinga og skráir tvær breytur. Önnur þeirra er heildarupphæð sem einstaklingarnir skulda. Hin breytan tekur gildi frá 1 upp í tólf eftir því í hvaða mánuði einstaklingarnir eru fæddir (1 fyrir janúar, 2 fyrir febrúar o.s.frv). Af hvaða gerð væri réttast að skrá breyturnar sem Heiða Dóra mælir?

Dæmi 2.4
Hverjar af eftirtöldum breytum eru talnabreytur og hverjar eru flokkabreytur?

a) Innsláttarhraði unglinga á lyklaborði.

b) Litur á jólaseríum í gluggum landsmanna.

c) Fjöldi bifreiða sem aka um Suðurgötuna föstudaginn 3. febrúar 2012.

d) Ferðamáti sálfræðinema til og frá Háskóla Íslands.

e) Fjöldi innsláttavillna í þessari bók.

Dæmi 2.5
Fjóla rannsakar beinþynningu hjá íslenskum konum og kannar hvaða áhrif mataræði og hreyfing spila þar inn. Hún mælir beinþéttni handahófsvalinna kvenna (í mg/cm^2) og spyr þær einnig hversu mikið þær hreyfi sig (lítið, í meðallagi eða mikið) og hvort þær neyti mjólkurvara (aldrei, stundum, oft). Með hvaða hætti væri rétt að skrá þessar breytur?

Dæmi 2.6
María kannar hljóðvist í leikhússölum borgarinnar. Hún mætir á eina leiksýningu af hverju einasta verki sem sett er upp á Höfuðborgarsvæðinu í desember og skráir mesta hljóðstyrkinn sem mældist á sýningunni (í desíbelum). Af hvaða gerð er breytan sem María mælir?

Dæmi 2.7
Skráið niður dæmi um þrjár samfelldar og þrjár strjálar talnabreytur.

Dæmi 2.8
Hvort væri hentugra að skrá fjölda systkina sem einstaklingur á sem strjála eða samfellda talnabreytu? En fjölda barrnála á grenitré? Rökstyðjið svar ykkar.

Dæmi 2.9
Kári kannar gerðir kenninafna á Íslandi. Hann velur 1000 manna handahófsúrtak úr þjóskrá og kannar hvort einstaklingar beri ættarnöfn og hvort þeir kenni sig við móður eða föður. Af hvaða gerð er breytan sem Kári skráir?

Dæmi 2.10
Birgir er mikill listakokkur og almennur áhugamaður um matarvenjur Íslendinga. Hann framkvæmir könnun þar sem hann velur handahófskennt úrtak 20 manna og 20 kvenna og spyr þau hversu oft í viku þau borði heitan mat í hádeginu. Er úrtakið sem Birgir valdi dæmi um: lagskipt slembiúrtak, einfalt slembiúrtak, parað slembiúrtak eða sjálfboðaúrtak?

Dæmi 2.11
Finn langar að kanna meðalfjölda veitingastaða sem ferðamenn á gistihúsum heimsækja á meðan dvöl þeirra stendur. Til þess útbjó hann spurningalista sem lágu í móttöku allra gistihúsa á Höfuðborgarsvæðinu. Könnunin var auglýst mjög vel og gestir hvattir til að taka þátt og skila svörunum í þar til gerða kassa sem einnig lágu í móttökunni. Hvert er helsta vandamálið við tilraunahögun könnunarinnar hans Finns?

Dæmi 2.12
Gunnar Þór þrekþjálfari telur að það séu sterk tengsl milli matarvenja og heilsu. Hann framkvæmir því tilraun þar sem hann parar saman tvo og tvo nemendur sem honum þykir svipaðir að þreki. Hann lætur svo annan meðlim hvers pars á sérstakt mataræði á meðan hinn borðar eins og hann er vanur. Þáttakendur eru á þessu mataræði í 4 vikur en að því loknu eru framkvæmd þrekpróf á öllum einstaklingunum.

a) Er úrtakið sem Gunnar Þór valdi dæmi um: lagskipt slembiúrtak, einfalt slembiúrtak, parað slembiúrtak eða sjálfboðaúrtak?

b) Hverjir eru helstu vankantarnir á tilraunahögun Gunnars Þórs?

Dæmi 2.13
Agnar vill kanna hvers konar auglýsingar höfða best til viðskiptavina. Hann sendir því stuttan spurningalista á alla vini sína á Facebook en til að tryggja hátt svarhlutfall gefur hann öllum þeim sem svara könnuninni lítinn happdrættismiða þar sem í vinning er 10 þúsund króna inneign í útivistarbúð. Hvað er athugavert við tilraunahögun Agnars?

Dæmi 2.14
Fríðu langar að kanna meðalfjölda veitingastaða sem ferðamenn á gistihúsum heimsækja á meðan dvöl þeirra stendur. Hún hefur hins vegar þá kenningu að smekklega klæddir ferðamenn (að hennar mati) heimsæki fleiri veitingastaði heldur en þeir síður smekkvísu. Hún framkvæmir könnun þar sem hún velur 100 gesti af handahófi, spyr þá hversu marga veitingastaði þeir hafi heimsótt og skráir að því loknu hjá sér hversu smekklega henni finnst þeir klæddir (á skalanum 1 til 10). Hvert er helsta vandamálið við tilraunahögun könnuninarinnar hennar Fríðu?

Dæmi 2.15
Einar telur að of mikið sjónvarpsáhorf valdi offitu hjá börnum. Hann framkvæmir því rannsókn þar sem hann velur 100 börn af handahófi úr þjóðskrá, skráir nákvæmlega sjónvarpsáhorf þeirra og mælir líkamsfitu þeirra. Hann kemst að þeirri niðurstöðu að börn sem horfa á sjónvarp í meira en þrjár klukkustundir á dag eru tvöfalt líklegri til að þjást af offitu heldur en þau sem horfa skemur á sjónvarpið. Getur Einar fullyrt út frá þessari rannsókn að sjónvarpsáhorf valdi offitu hjá börnum? Rökstyðjið svar ykkar.

3. kafli

Myndræn framsetning

Ein mynd segir meira en þúsund orð. Þau eru vandfundin fræði þar sem þessi setning á betur við en í tölfræði. Sama hvert markmið rannsóknarinnar er, og hvers eðlis gögnin eru, er það nánast ófrávíkjanleg regla að fyrsta skref í tölfræðiúrvinnslu ætti ætíð að vera að skoða gögnin myndrænt. Í þessum kafla ætlum við að skoða algengustu tegundir grafa sem notuð eru við myndræna framsetningu gagna.

Kjarni tölfræðiúrvinnslu er að átta sig sem best á eðli mælinganna sem skoðaðar eru. Þar eru hugtök eins og breytileiki gagnanna lykilatriði. Hversu mikinn mun sjáum við á útkomum viðfangsefna okkar? Hvernig dreifast útkomurnar? Þetta köllum við einfaldlega dreifingu mælinganna en myndræn framsetning er ein besta leiðin til að átta sig á dreifingu mælinganna.

Í kafla 3.1) skoðum við algengustu tegundir grafa fyrir strjálar breytur, stöplarit og kökurit. Þar á eftir, í köflum 3.2 og 3.3, taka við algengustu tegundir grafa fyrir samfelldar breytur, stuðlarit og kassarit. Að lokum fjöllum við um punktarit í kafla 3.4 en með þeim er gott að átta sig á sambandi tveggja samfelldra breyta.

3.1. Stöplarit og kökurit

Algengustu tegundir grafa fyrir strjálar breytur eru *stöplarit* (bar chart) og *kökurit* (pie chart). Kökurit eru mikið notuð í viðskiptaheiminum og í fjölmiðlum en eru sjaldséð í tímaritum og bókum um raunvísindi. Stöplarit má sjá víðsvegar og eru þau í nánast öllum tilfellum betur til þess fallin að sýna gildi strjállar breytu myndrænt en kökuritin. Skoðum nú hvernig búa má til stöplarit og kökurit.

3.1.1. Stöplarit

Stöplarit er algengasta aðferðin til að sýna gildi strjállar breytu myndrænt og á það jafnt við um flokkabreytur sem strjálar talnabreytur. Áður en hafist er handa við að teikna stöplarit er gott að setja upp litla töflu sem sýnir mögulegar útkomur breytunnar og hversu mörg viðfangsefni hljóta hverja útkomu.

3.1. Stöplarit (bar chart)

Með stöplariti teiknum við eina súlu fyrir hverja útkomu breytunnar og mega þær ekki liggja hvor að annarri. Hæð súlnanna sýnir tíðni eða hlutfall viðkomandi útkomu. Raða skal súlunum svo auðvelt sé að greina upplýsingarnar. Ef breytan er óröðuð flokkabreyta er súlunum oft raðað upp eftir stærðarröð tíðni útkomanna í hvort sem heldur vaxandi eða minnkandi röð. Ef breytan er röðuð flokkabreyta eða strjál talnabreyta er súlunum yfirleitt raðað upp í vaxandi stærðarröð útkomanna sjálfra, ekki tíðni þeirra.

Sýnidæmi 3.1: Stöplarit

Útlendingaeftirlitið annaðist talningar á erlendum gestum til og frá Íslandi frá árinu 1949 til ársins 2000 og náðu talningar yfir gesti með millilandaflugi og skipum. Ferðamálastofa hefur tekið saman þessar tölur og þar má meðal annars sjá að árið 2000 var heildarfjöldi erlendra gesta 302913. Héðinn hefur mikinn áhuga á ferðamálafræði og ákvað hann að skoða þessar tölur nánar. Þær sjö þjóðir sem flestir gestirnir komu frá voru Bandaríkin með 53637 gesti, Bretland með 45106 gesti, Danmörk með 28456 gesti, Frakkland með 14955 gesti, Noregur með 24280 gesti, Svíþjóð með 29488 gesti og Þýskaland með 32664 gesti. Teiknið stöplarit sem sýnir mismunandi þjóðerni erlendra gesta árið 2000.

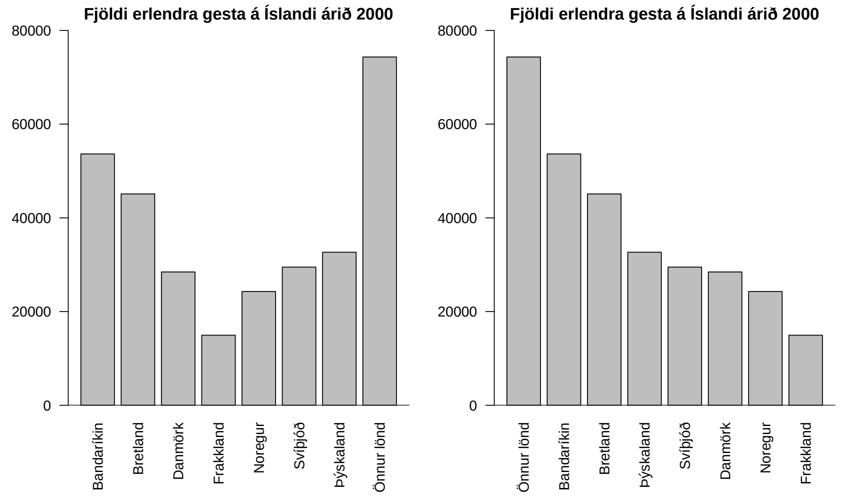
Breytan sem við höfum áhuga á að skoða hér er fjöldi erlendra gesta, flokkuð eftir þjóðerni. Tökum nú saman upplýsingarnar í litla töflu.

Þjóðerni	Fjöldi
Bandaríkin	53637
Bretland	45106
Danmörk	28456
Frakkland	14955
Noregur	24280
Svíþjóð	29488
Þýskaland	32664

Við höfum nú val um að gera stöplarit sem sýnir þessi sjö lönd eða að bæta við einni súlu til viðbótar sem sýnir fjölda ferðalanga frá öðrum löndum en þessum sjö og mun þá stöplaritið okkar sýna heildarfjölda erlendra gesta árið 2000. Áður en við gerum það þurfum við að reikna út hversu margir gestir komu frá öðrum þjóðum en þessum sjö. Við vitum að heildarfjöldi gesta var 302913 og því fáum við fjölda gesta frá öðrum löndum með að draga fjöldann frá þessum sjö frá heildarfjöldanum.

$$\begin{aligned}\text{Önnur lönd} &= 302913 - 53637 - 45106 - 28456 - 14955 - 24280 - 29488 - 32664 \\ &= 74327\end{aligned}$$

Búum nú til tvö stöplarit sem sýna skiptingu erlendra gesta eftir þjóðerni. Á fyrra stöplaritinu er súlunum raðað eftir stafrófsröð en á því seinna eftir stærðarröð. Auðveldara er að lesa úr því sem raðað er eftir stærðarröð.



Við vinnum oft með gagnasöfn sem innihalda nokkrar flokkabreytur. Hægt er að búa til stöplarit af tveimur flokkabreytum í einu með því að nota mismunandi liti fyrir flokka annarrar flokkabreytunnar.

3.1.2. Kökurit

Áður en hafist er handa við að teikna kökurit er gott að gera litla töflu sem sýnir flokka breytunnar, fjölda í hverjum flokki og hlutfall viðfangsefna í hverjum flokki af heildinni.

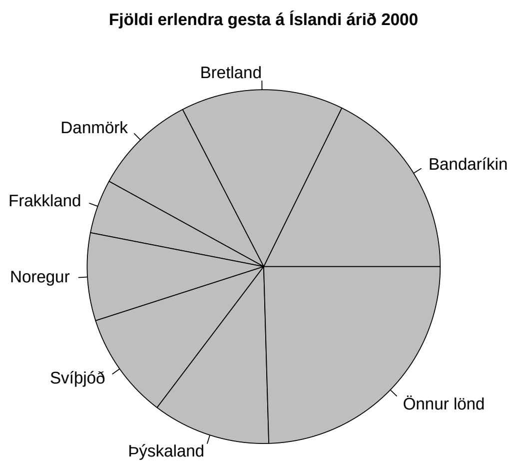
3.2. Kökurit (pie chart)

Þegar búa á til kökurit er mikilvægt að allir flokkar breytunnar sem verið er að skoða séu með á myndinni. Fjöldi sneiða í kökuritinu ræðst af fjölda flokka breytunnar. Stærð sneiðarinnar ræðst af hlutfallslegum fjölda í viðkomandi flokki af heildinni. Gætið þess að hlutföllin séu samanlagt 100%. Við gerum sjaldnast kökurit í höndunum heldur notum við tölfræðihugbúnað til verksins.

Sýnidæmi 3.2: Kökurit
Skoðum aftur fjölda erlendra gesta árið 2000. Bætum nú við töfluna sem við bjuggum til í dæmi 3.1 hlutfall gesta í hverjum flokki fyrir sig og fjölda gesta frá öðrum löndum.

Þjóðerni	Fjöldi	Hlutfall
Bandaríkin	53637	0.18
Bretland	45106	0.15
Danmörk	28456	0.09
Frakkland	14955	0.05
Noregur	24280	0.08
Svíþjóð	29488	0.09
Þýskaland	32664	0.11
Önnur lönd	74327	0.25

Hlutfallstölurnar segja okkur hversu hátt hlutfall kökunnar á að tilheyra hverjum flokki. Við þyrftum á gráðuboga að halda ætluðum við að gera kökurit í höndunum en við látum okkur nægja að gera kökurit með hjálp tölfræðiforrits.



Eins og sjá má á kökuritinu er erfitt að greina muninn á löndunum og enn erfiðara er að lesa úr kökuritinu um það bil hversu margir gestirnir eru frá hverju landi fyrir sig þó svo að við þekktum heildarfjölda gesta. Við mælum því eindregið með að stöplarit séu notuð frekar en kökurit.

3.2. Stuðlarit

Algengasta aðferðin til að skoða samfellda breytu myndrænt er stuðlarit. Við munum skoða hvernig búa á til stuðlarit og kynna nokkur hugtök sem notuð eru til að lýsa lögun stuðlarita. Kassarit eru einnig góð aðferð til að skoða samfelldar breytur, en til að teikna þau þarf að reikna fimm tölu samantekt, sem við kynnumst í kafla 4.3.3. Síðar, í kafla 3.4, munum við einnig skoða punktarit en þau eru notuð til að kanna samband tveggja talnabreyta. Öll þessi rit eru einnig oft notuð til að lýsa strjálum talnabreytum sem taka *mjög* mörg gildi.

3.2.1. Stuðlarit

Stuðlarit er svipað stöplariti í útliti en helsti munur á útliti þeirra er að ekkert bil er á milli súlnanna í stuðlariti (gott er að hugsa sér stuðlaberg til að muna hvort bil eigi að vera á milli súlnanna í stuðlariti). Það er örlítið snúnara að búa til stuðlarit en stöplarit þar sem samfelldar breytur geta tekið óendanlega mörg gildi. Því þarf að byrja á að mynda flokka áður en talið er hversu margar mælingar falla í hvern flokk. Þegar flokkarnir hafa verið myndaðir er gott að búa til töflu sem inniheldur flokkana ásamt fjölda mælinga í hverjum flokki fyrir sig.

3.3. Stuðlarit (histogram)

Stuðlarit samanstendur af súlum sem standa hver upp að annarri. Fjöldi súlna ræðst af fjölda flokka sem talnabreytunni er skipt upp í. Þegar flokkarnir eru myndaðir er gott að hafa eftirfarandi í huga.

- Neðri og efri mörk eiga að vera einföld og auðskilin
- Bilin mega ekki skarast og verða að ná yfir allar mælingar
- Bilin eiga að vera jafn breið
- Flokkarnir eiga að vera hæfilega margir. Engin ein rétt lausn er til en ágætt er að nota þumalputtaregluna að fjöldi flokka á að vera u.þ.b 5 sinnum logaritminn af fjölda mælinga

$$\text{fjöldi flokka} = 5 \cdot \log(\text{fjöldi mælinga})$$

Þegar flokkarnir hafa verið myndaðir er teiknuð ein súla fyrir hvern flokk og ræðst hæð súlunnar af fjölda (eða hlutfalli) mælinga í þeim flokki.

Þegar við tökum logaritma af tölu finnum við í hvaða veldi þarf að setja töluna 10 til að útkoman verði sú tala. Til dæmis er logaritminn af 100 talan 2, því $10^2 = 100$. Á flestum vasareiknum má finna takka sem tekur logaritma af tölu. Hann er yfirleitt merktur með `log`.

Yfirleitt eru stuðlarit ekki teiknuð í höndunum, heldur er stuðst við tölfræðihugbúnað til verksins. Hér fyrir neðan má þó sjá hvernig gera má stuðlarit í höndunum.

Sýnidæmi 3.3: Stuðlarit
Hagstofan hefur tekið saman meðalhitastig á Stykkishólmi frá árunum 1841 til 1995. Mælingarnar má sjá hér að neðan.

```
0.94 0.95 1.27 1.48 1.67 1.76 1.95 1.97 2.06 2.10 2.16 2.25
2.27 2.32 2.37 2.38 2.41 2.44 2.47 2.48 2.50 2.55 2.56 2.58
2.61 2.61 2.62 2.65 2.66 2.67 2.73 2.75 2.84 2.85 2.86 2.91
2.92 2.95 2.97 2.98 2.98 3.01 3.03 3.03 3.04 3.04 3.05 3.07
3.12 3.14 3.14 3.15 3.20 3.23 3.24 3.25 3.26 3.27 3.27 3.28
3.28 3.30 3.31 3.32 3.33 3.33 3.34 3.35 3.36 3.37 3.38 3.40
3.40 3.41 3.41 3.42 3.44 3.45 3.48 3.51 3.52 3.52 3.52 3.56
3.56 3.58 3.58 3.58 3.60 3.62 3.62 3.64 3.65 3.67 3.68 3.71
3.73 3.75 3.77 3.77 3.77 3.78 3.79 3.82 3.82 3.83 3.84 3.85
3.86 3.87 3.88 3.92 3.92 3.92 3.94 3.94 3.97 3.97 3.97 3.98
4.00 4.01 4.02 4.03 4.03 4.07 4.07 4.08 4.10 4.11 4.12 4.18
4.19 4.19 4.23 4.28 4.28 4.33 4.34 4.43 4.44 4.45 4.45 4.55
4.55 4.62 4.72 4.77 4.82 4.83 4.92 5.06 5.09 5.11 5.17
```

Það er erfitt að gera sér grein fyrir því hvar gögnin liggja með því að skoða einungis tölurnar og því búum við til stuðlarit sem hjálpar til við að fá tilfinningu fyrir gögnunum. Við þurfum að byrja á að ákveða hversu marga flokka (súlur) við ætlum að nota. Þumalputtareglan segir að flokkarnir eigi að vera u.þ.b $5 \cdot$ logaritminn af fjölda mælinga. Við höfum 155 mælingar og því fæst

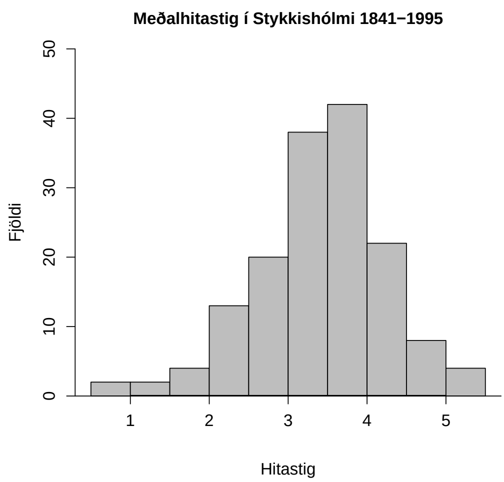
$$\text{Fjöldi flokka} = 5 \cdot \log(155) = 10.95.$$

Þumalputtareglan segir okkur því að 10 til 11 flokkar passa vel. Skoðum nú á hvaða bili gögnin okkar liggja. Við sjáum að lægsta gildið er 0.94 og hæsta gildið er 5.17. Því væri eðlilegt að lægsti flokkurinn næði frá 0.50 gráðum og sá efsti upp í 5.50 gráður (munið að efri og neðri mörk eiga að vera auðskilin). Þetta segir okkur að gögnin spanna um 5 gráður. Við sjáum því að eðlilegast væri að nota 10 flokka þar sem auðvelt er að skipta gráðunum 5 upp í 10 flokka.

Búum nú til flokkana og teljum hversu margar mælingar falla í hvern flokk og reiknum hlutfallið. Hornklofi [þýðir frá og með mælingunni, en svigi) þýðir að mælingunni en ekki með henni. $[0.5, 1)$ þýðir því allar mælingar frá og með 0.5 og að 1, þar sem 1 er ekki talinn með.

Flokkur	Fjöldi
$[0.5, 1)$	2
$[1, 1.5)$	2
$[1.5, 2)$	4
$[2, 2.5)$	12
$[2.5, 3)$	21
$[3, 3.5)$	38
$[3.5, 4)$	41
$[4, 4.5)$	23
$[4.5, 5)$	8
$[5, 5.5)$	4

Á stuðlaritum er ýmist fjöldinn eða hlutfallið teiknað. Stuðlaritið hér að neðan sýnir fjöldann.



Það er mun auðveldara að fá tilfinningu fyrir gögnunum með að horfa á stuðlarit en ef gögnin sjálf eru skoðuð. Við sjáum að algengasti meðalhitinn er 3-4 gráður.

3.2.2. Lögun stuðlarita og útlagar

Fyrsta skrefið í nær allri tölfræðiúrvinnslu er að fá tilfinningu fyrir dreifingu mælinganna sem við erum að vinna með. Besta leiðin til þess er að teikna stuðlarit. Þá horfum við sérstaklega á eftirfarandi atriði sem notuð eru til að lýsa dreifingu gagna.

3.4. Lögun dreifinga (Shape of distributions)

Eftirfarandi hugtök eru oft notuð til að lýsa dreifingum mælinga.

- Dreifingu minnstu mælinganna köllum við *vinstri hala* (left-tail) dreifingarinnar. Dreifingu stærstu mælinganna köllum við *hægri hala* (right-tail) dreifingarinnar.
- Dreifing er *samhverf* (symmetric) ef hægri hlið hennar dreifist eins og spegilmynd vinstri hliðarinnar.
- Dreifing sem ekki er samhverf er *skekkt* (skewed). Dreifing er *skekkt til hægri* (skewed to the right) ef hægri hali hennar er lengri en sá vinstri og *skekkt til vinstri* (skewed to the left) ef sá vinstri er lengri en sá hægri.
- Ef dreifingin hefur einn topp er talað um *einkryppudreifingu* (unimodal).
- Ef dreifingin hefur tvo toppa er talað um *tvíkryppudreifingu* (bimodal).
- Ef dreifing hefur fleiri en tvo toppa er talað um *fjölkryppudreifingu* (multimodal).

Hugtökin eru útskýrð frekar á mynd 3.1.

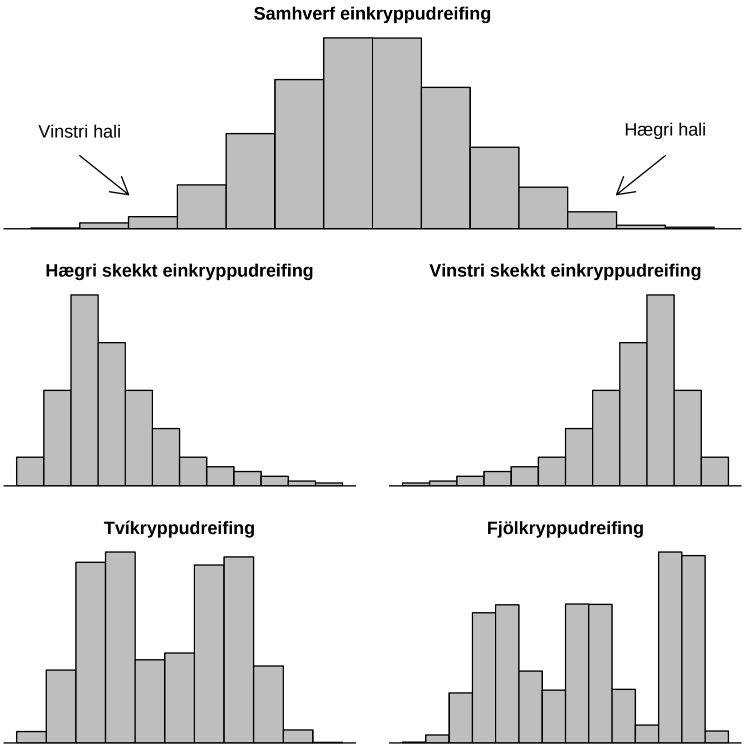
Stuðlarit eru einnig góð til að koma auga á svokallaða útlaga (outliers).

3.5. Útlagar (Outliers)

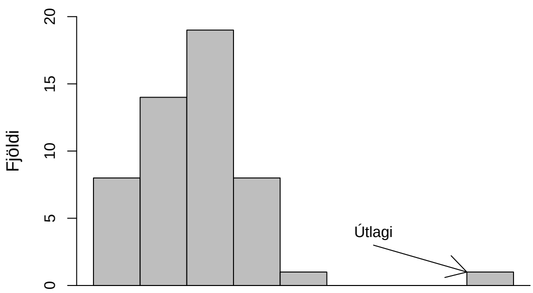
Útlagar eru mæligildi sem eru mjög ólík öðrum mæligildum í sama gagnasafni. Ýmsar ástæður geta verið fyrir útlögum og er mjög mikilvægt að skoða þá sérstaklega og hugleiða ástæðu þeirra. Útlagar munu koma fyrir aftur í bókinni t.d. í köflum 3.3 og 10.1

Á mynd 3.2 má sjá stuðlarit af mælisafni sem inniheldur útlaga. Útlagar geta komið í samhverfum dreifingum jafnt og skekktum og fjölkryppudreifingum.

Í kafla 5 munum við koma með formlegri skilgreiningu á hugtakinu *líkindadreifing* breyta. Þar verða helstu líkindadreifingar strjálla breyta sem og samfelldra teknar fyrir.



Mynd 3.1: Lögun stuðlarita



Mynd 3.2: Stuðlarit af mælisafni sem inniheldur útlaga

3.3. Kassarit

Kassarit er notað til að skoða staðsetningu og dreifingu mælinga. Þau endurspegla gögnin vel, sýna glöggt hvort dreifingin er samhverf eða skekkt og eru auk þess góð til að bera kennsl á útlaga. Kassarit má nota hvort heldur til að skoða dreifingu einnar talnabreytu sem og að kanna samband talnabreytu og flokkabreytu. Til að teikna kassarit þarf að reikna fyrst fimm tölu samantekt sem er sýnt í kafla 4.3.3, sem gefur okkur gildin Q_1, Q_2 og Q_3.

Til eru nokkrar útfærslur af kassaritum. Útgáfan sem við skoðum hér að neðan er sú einfaldasta en við skoðum einnig flóknari útgáfu í lok kaflans.

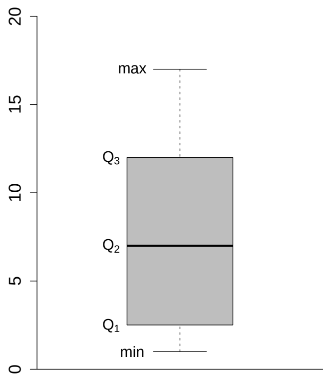
3.6. Kassarit (Boxplot)

- Kassarit samanstendur af kassa og tveimur línum sem ganga út frá endum kassans. Þessar línur eru oft kallaðar skegg (whiskers).
- Kassinn má liggja (láréttur) eða standa (lóðréttur) en í þessari bók látum við kassana standa. Í því tilfelli skal y-ásinn hafa gildi sem nær frá neðsta gildi gagnasafnsins (eða rétt þar fyrir neðan) og upp í hæsta gildi gagnasafnsins (eða rétt þar fyrir ofan).
- Neðri endi kassans skal standa í Q_1 og efri hluti kassans í Q_3. Draga skal línu í gegnum kassann í Q_2.
- Neðra skeggið skal ná í minnsta mæligildið (min) og efra skeggið skal ná í það hæsta (max).

Ef að kassaritið er samhvert um Q_2 er dreifing breytunnar samhverf. Ef að það er minni munur á minnsta gildinu, $Q1$ og $Q2$ en á milli Q_2, Q_3 og stærsta gildisins er dreifingin hægri skekkt, en vinstri skekkt ef því er öfugt farið.

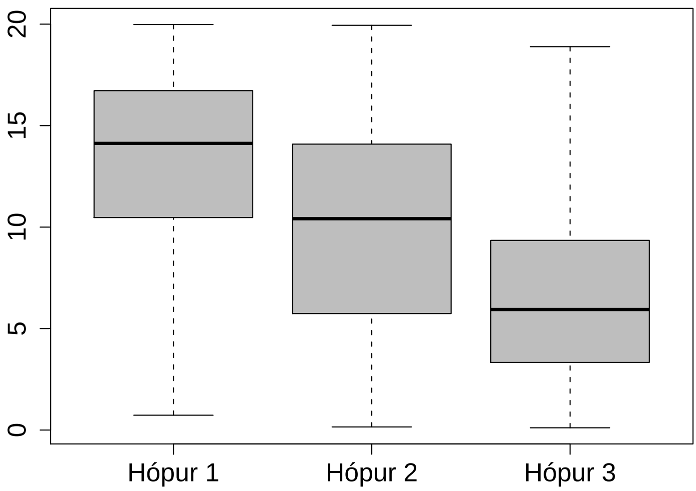
Sýnidæmi 3.4: Kassarit
Höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15, 17`. Búið til kassarit fyrir mælingarnar. Er dreifing mælinganna samhverf?

Við munum sjá í dæmi 4.9 að fimm-tölu samantekt gagnasafnsins er:
$\min = 1,\ Q_1 = 2.5,\ Q_2 = 7, Q_3 = 12$ og $\max = 17$.



Dreifing þessara mælinga er hægri skekkt.

Kassarit eru einnig nytsamleg til að bera saman dreifingu tveggja eða fleiri hópa mælinga. Á mynd 3.3 má sjá kassarit af mælingum þriggja hópa. Dreifing mælinga hóps 1 er skekkt til vinstri, dreifing mælinga hóps 2 er samhverf og dreifing mælinga hóps 3 er skekkt til hægri.



Mynd 3.3: Kassarit

3.3.1. 1.5 $*$ IQR reglan fyrir útlaga

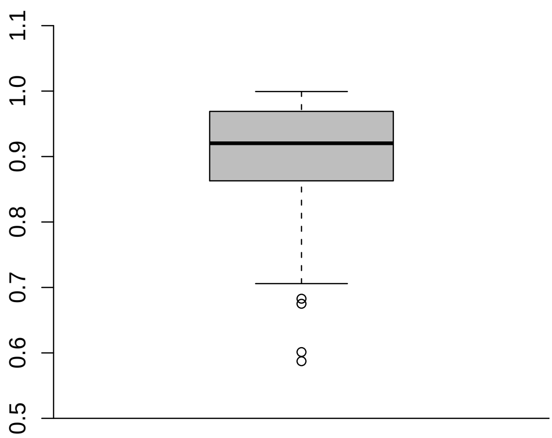
Útlagar (outliers) eru mæligildi sem eru mjög ólík öðrum mæligildum (sjá kassa 3.5) og því er mikilvægt að finna þá. Ein leið til að átta sig á hvort um útlaga sé að ræða er að bera saman fjarlægð frá gildinu sem sker sig úr og í næsta fjórðungamark (Q_1 eða Q_3).

3.7. 1,5 $*$ IQR reglan fyrir útlaga

- Byrjum á að reikna út fjarlægð mælingarinnar sem sker sig úr frá næsta fjórðungamarki (Q_1 eða Q_3).
- Þessi fjarlægð er síðan borin saman við fjórðungaspönnina . Ef fjarlægð mæligildisins frá næsta fjórðungamarki er meiri en $1.5{*}IQR$ er litið á mælinguna sem útlaga.

3.3.2. 1.5 $*$ IQR reglan og kassarit

Mörg tölfræðiforrit nota 1.5 $*$ IQR regluna þegar teiknuð eru kassarit og eru þau oft kölluð *breytt kassarit* (modified boxplot). Línurnar sem ganga út frá kassanum, skeggið, eru þá látnar ná allt að einni og hálfri kassalengd frá brúnum kassans en ekki að hæsta og lægsta gildinu eins og gert er í einföldustu útgáfunni. Mæligildi sem eru utan við skeggið eru útlagar og merktir inn á ritið með hring.



Mynd 3.4: Breytt kassarit

3.4. Punktarit

3.8. Punktarit (scatter plot)

Við notum *punktarit* (scatter plot) til að skoða samband milli tveggja talnabreyta. Gildi annarrar breytunnar eru á y-ásnum (lóðréttur) og hinnar á x-ásnum (lárettur). Þegar önnur breytan er skýribreyta og hin er svarbreyta er svarbreytan alltaf á y-ásnum og skýribreytan á x-ásnum.

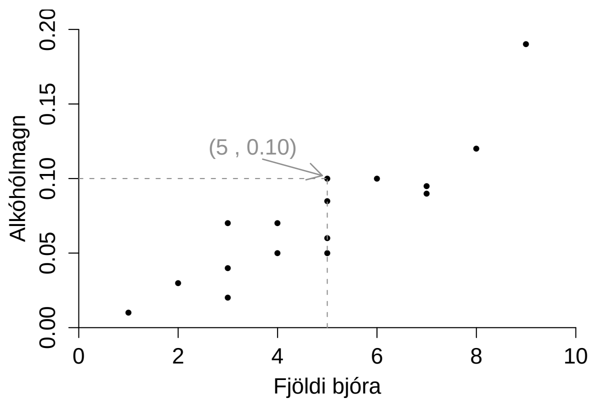
Sýnidæmi 3.5: Punktarit

Þorgerður og Birna eru miklar áhugakonur um bjór. Þær ákváðu því að framkvæma tilraun þar sem samband á milli áfengismagns í blóði og fjölda drukkinna bjóra var kannað. 16 nemendur tóku þátt í tilrauninni. Gögnin má sjá hér að neðan.

Nemi	Fjöldi bjóra	Alkóhólmagn í blóði	Nemi	Fjöldi bjóra	Alkóhólmagn í blóði
1	5	0.100	9	8	0.120
2	2	0.030	10	3	0.040
3	9	0.190	11	5	0.060
4	7	0.095	12	5	0.050
5	3	0.070	13	6	0.100
6	3	0.020	14	7	0.090
7	4	0.070	15	1	0.010
8	5	0.085	16	4	0.050

Teiknið punktarit af gögnunum. Eru breyturnar talnabreytur eða flokkabreytur? Má flokka aðra breytuna sem skýribreytu og hina sem svarbreytu?

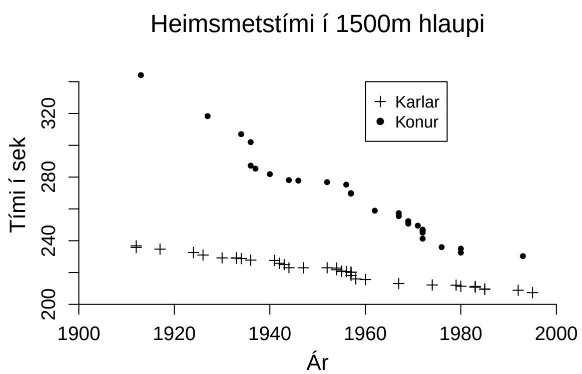
Breyturnar eru báðar talnabreytur. Alkóhólmagn i blóði er svarbreyta og fjöldi bjóra er skýribreyta. Punktarit af gögnunum má sjá hér að neðan. Fyrsti punkturinn í mælisafninu er merktur sérstaklega.



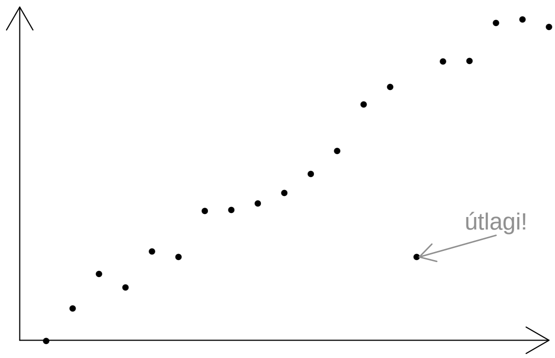
Við vinnum oft með gagnasöfn sem innihalda bæði talnabreytur og flokkabreytur. Hægt er að búa til punktarit af tveimur talnabreytum og einni flokkabreytu í einu. Talnabreyturnar fara þá hvor á sinn ás eins og áður og mismunandi litir/tákn notaðir fyrir flokka flokkabreytunnar.

Sýnidæmi 3.6: Punktarit með flokkabreytu
Við höfum gögn yfir heimsmetstíma í 1500m hlaupi frá árinu 1912. Breyturnar í gagnasafninu eru þrjár: Ár, tími og kyn. Hverjar af breytunum eru talnabreytur og hver er flokkabreyta?

Ár og tími eru talnabreytur og kyn er flokkabreyta. Hér að neðan má sjá punktarit þar sem talnabreyturnar eru hvor á sínum ás og flokkabreytan er sýnd með mismunandi táknum.



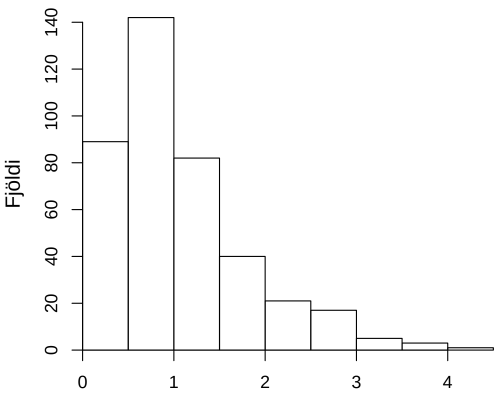
Gott er að nota punktarit til að koma auga á útlaga sem voru skilgreindir í kassa 3.5. Á mynd 3.5 má sjá punktarit þar sem útlagi er í gagnasafninu en í hluta 10.1 munum við skoða betur hvaða áhrif útlagar geta haft í aðhvarfsgreiningu. Punktarit eru einnig mikilvæg til að kanna hvort samband tveggja breyta sé *línulegt* og ef svo er, átta sig á *stefnu* og *styrkleika* sambandsins. Þessum hugtökum kynnumst við í hluta 4.4.



Mynd 3.5: Punktarit þar sem útlagi er í gagnasafninu

Dæmi

Dæmi 3.1



Hver af eftirfarandi lýsingum passar við myndina að ofan?

a) Stuðlarit af hægri skekktri einkryppudreifingu.

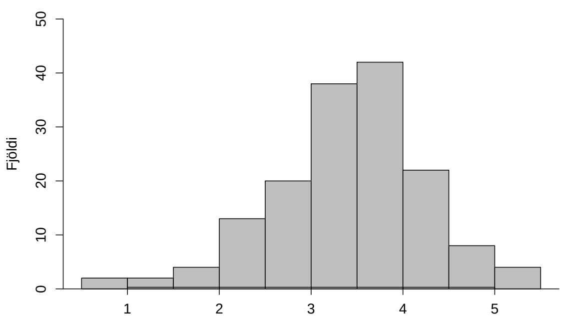
b) Stöplarit af vinstri skekktri einkryppudreifingu.

c) Stuðlarit af vinstri skekktri tvíkryppudreifingu.

d) Stöplarit af hægri skekktri tvíkryppudreifingu.

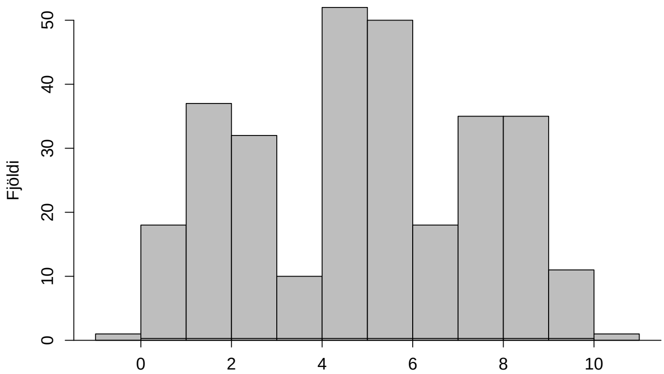
Dæmi 3.2
Héðinn hefur mælt þyngd 100 barna og ætlar hann að sýna mælingarnar með stuðlariti. Hversu margar súlur er æskilegt að séu á stuðlaritinu?

Dæmi 3.3
Á hvaða bili liggja flestar mælingarnar á stuðlaritinu hér að neðan?

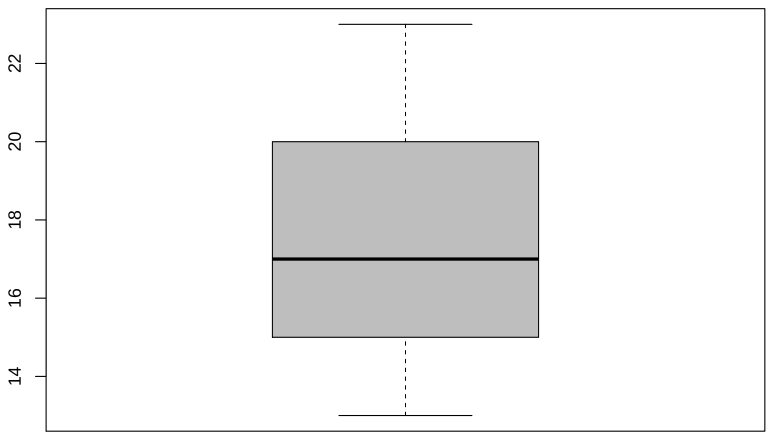


Dæmi 3.4
Hver af eftirfarandi lýsingum passar við lögun dreifingarinnar á myndinni hér að neðan?

a) Hægri skekkt einkryppudreifing.
b) Vinstri skekkt einkryppudreifing.
c) Fjölkryppudreifing
d) Tvíkryppudreifing.



Dæmi 3.5
Á myndinni hér að neðan má sjá kassarit mælisafns. Lesið af grafinu minnsta gildi, hæsta gildi, Q_1, Q_2 og Q_3.



4. kafli

Lýsandi tölfræði

Eins og við sögðum í 2. kafla snýst tölfræði um að fá sem mestar upplýsingar út úr tölulegum gögnum. Ein góð aðferð til þess er að nota *lýsistærðir* sem eru tölur sem lýsa tilteknum eiginleikum mælinga. Við hefjum þennan kafla á almennri umfjöllun um lýsistærðir (kafli 4.1) og kynnum þar *vísa* til sögunnar, ritháttt gerir okkur kleift að skrifa formúlur sem lýsa því hvernig lýsistærðir eru reiknaðar.

Við munum fjalla um fjölmargar lýsistærðir sem lýsa *miðju* (kafli 4.2) og *breytileika* (4.3) breyta. Þau hugtök munum við skýra nánar þegar að þeim kemur. Að því loknu tekur við umfjöllun um lýsistærðir sem lýsa samspili tveggja breyta. Fyrst ber að nefna *fylgni* (kafli 4.4 sem við notum til að lýsa sambandi tveggja samfelldra breyta. Þar á eftir koma lýsistærðir sem lýsa sambandi tveggja strjálla breyta. Fyrst fjöllum við um lýsistærðir sem lýsa sambandi tveggja hlutfalla (kafli 4.5) og að því loknu fjöllum við um fjórar lýsistærðir til að lýsa flokkunaraðferðum í kafla 4.6. Við ljúkum umfjöllunun okkar í kafla 4.7 með stuttri samantekt á hvenær er við hæfi að nota þær lýsistærðir sem við höfum fjallað um miðað við gerð og dreifingu breytanna sem þær lýsa.

4.1. Lýsistærðir

4.1. Lýsistærð (statistic)

Lýsistærð er tala sem verður reiknuð með einhverjum ákveðnum hætti út frá mælingunum okkar.

Dæmi um lýsistærðir eru lýsistærðin meðaleinkunn, reiknuð út frá öllum lokaeinkunnum. Hún gefur okkur upplýsingar um hversu vel nemandi hefur staðið sig í skóla. Annað dæmi um lýsistærð er heildar stigafjöldi, reiknuð út frá úrslitum leikja. Hana getum við notað til að meta hvernig lið hefur staðið sig á Íslandsmóti.

Eins og þið sjáið eru lýsistærðir hvarvetna í umhverfi okkar, enda gefa þær okkur miklar upplýsingar um gögnin á skýran og fljótlegan hátt. Til eru margar gerðir lýsistærða sem lýsa ólíkum eiginleikum mælinga. Algengustu lýsistærðirnar eru meðaltal og staðalfrávik en þið hafið sennilega heyrt um fleiri lýsistærðir eins og til dæmis stærsta gildi, tíðasta gildi og miðgildi.

Lýsistærðir geta bæði tekið saman mælingar á mörgum viðfangsefnum eða margar mælingar á sama viðfangsefni. Við getum til dæmis mælt púls hjá 20 hlaupurum og reiknað meðalpúls þeirra. Við getum líka mælt púlsinn hjá sama hlauparanum eftir 20 hlaup og reiknað meðalpúlsinn hjá þessum tiltekna hlaupara.

Hvort sem mælingarnar eru framkvæmdar oft á sama viðfangsefni eða á mörgum viðfangsefnum látum við n standa fyrir fjölda þeirra mælinga sem við erum að skoða, í litla dæminu að ofan er $n = 20$. Að sama skapi er hefð fyrir því að tákna mælingarnar með bókstafnum x, en á bókstafinn hengjum við tölu sem kallast *vísir* sem segir til um númer hvað hver og ein tiltekin mæling er. Ef við vitum ekki í hvaða röð mælingarnar bárust ákveðum við af handahófi hvaða mæling er fyrsta mælingin og hver sú síðasta.

4.2. Vísir (index)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar á tiltekinni breytu og köllum mælingarnar $x_1, \ldots, x_n$. Tölurnar $1, \ldots, n$, sem mælingarnar eru tölusettar eftir kallast *vísar* (index) mælinganna.

Þannig hefur fyrsta mælingin, x_1, vísinn einn, mæling x_2 hefur vísinn tvo og svo framvegis. Síðasta mælingin x_n hefur vísinn n en við getum líka talað um ótilgreind x_i þar sem það er ekki ákvarðað hvert gildið á vísinum i er. Þá stendur x_i fyrir hvaða mælingu sem er.

Segjum sem svo að við höfum þrjár mælingar á efri mörkum blóðþrýstings, 121 mmHg, 110 mHg og 132 mmHg. Þá væri $x_1 = 121$ mmHg, $x_2 = 110$ mmHg og $x_3 = 132$ mmHg. Við getum líka látið vísana vísa til ákveðinna mælinga, þó að við vitum ekki hver númer þeirra eru. Þannig látum við x_{min} tákna minnstu mælinguna. Hún hefur vísinn „min“ sem stendur einfaldlega fyrir númer þeirrar mælingar með minnsta gildið. Að sama skapi notum við x_{max} til að tákna stærstu mælinguna, hvert svo sem númer hennar er.

Ef við höfum mælingar á fleiri en einni breytu, notum við mismunandi bókstafi til að lýsa mismunandi breytum. Þannig getum við til dæmis verið með mælingar $x_1, \ldots x_{10}$ á breytunni X og mælingar $y_1, \ldots, y_{14}$ á breytunni Y. Ef mælingarnar á breytunum X og Y eru gerðar á sömu viðfangsefnunum, þá gætum við þess að mælingar á sömu viðfangsefnunum hljóti sama vísi. Þannig stæði x_5 og y_5 fyrir mælingar á breytunum X og Y fyrir viðfangsefni númer fimm.

4.2. Lýsistærðir fyrir miðju

Orðið *miðja* getur haft ólíka merkingu eftir því hverju það á að lýsa. Með miðju hrings eigum við t.d. við miðpunkt hringsins og miðja tímabils er sá tímapunktur sem er mitt á milli upphafs og loka tímabilsins. Hugtakið miðja er líka notað til að lýsa mælingum en ólíkt dæmunum hér á undan er um nokkrar ólíkar leiðir að velja til að reikna miðjuna út. Fyrst skulum við hugleiða nánar hvað við eigum við með *miðju mælinga* (central tendency).

4.3. Miðja mælinga (central tendency)

Þegar við finnum *miðju* mælinga fyrir tiltekna breytu reiknum við út þá tölu sem er samtímis næst öllum mælingunum á breytunni okkar í einhverjum skilningi. Til þess eru nokkrar ólíkar aðferðir sem geta gefið ólíkar niðurstöður.

Oftast þyrpast flestar mælingarnar okkar í kringum miðjuna en verða stopulli eftir því sem lengra dregur frá henni. Því getur miðja verið mjög lýsandi fyrir mælingar. Það eru til nokkrar ólíkar aðferðir við að reikna miðju mælinga en munur þeirra liggur í því hvaða reglu við notum til að ákvarða hvaða tala er samtímis *næst* öllum mælingunum. Það er háð dreifingu mælinganna hver aðferðanna lýsir miðju mælinganna best. Sérhver þessara aðferða skilar einni tölu sem er reiknuð út frá mælingunum með ákveðnum hætti, það er, hún reiknar tiltekna lýsistærð. Athugið að oftar en ekki munu ólíkar lýsistærðir hljóta mismunandi útkomur. Í þessum hluta munum við fjalla um fimm mismunandi lýsistærðir sem allar lýsa miðju mælinga.

1. Miðja spannar (mid range)
2. Tíðasta gildi (mode)
3. Miðgildi (median)
4. Meðaltal (mean, arithmetic mean)
5. Vegið meðaltal (weighted mean)

Hér á eftir munum við fjalla nánar um þessar fimm gerðir lýsistærða fyrir miðju, hverju þær lýsa og hvenær er viðeigandi að nota þær.

4.2.1. Miðja spannar

Miðja spannar er meðaltal stærstu og minnstu mælinganna. Hún er gífurlega viðkvæm fyrir útlögum (breytist mikið eftir því hvort og hvaða útlagar eru í mælingunum) og því ekki mikið notuð í tölfræðiúrvinnslu. Hún getur þó verið gagnleg ef mælingarnar dreifast þétt um miðjuna. Eingöngu er hægt að lýsa talnabreytum með miðju spannar.

4.4. Miðja spannar (mid range)

Gerum ráð fyrir því að við höfum n mælingar $x_1, x_2, ... x_n$. Látum $x_{\min}$ tákna þá minnstu og $x_{\max}$ þá stærstu. *Miðja spannar* er reiknuð með

$$\text{Miðja spannar} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}. \tag{4.1}$$

Sýnidæmi 4.1: Miðja spannar
Við höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15.` Finnið miðju spannar.

Við finnum miðju spannar með jöfnu 4.1

$$\text{Miðja spannar} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = \frac{1 + 15}{2} = 8.$$

4.2.2. Tíðasta gildi

Tíðasta gildið er sú útkoma sem oftast kemur fyrir í mælingunum okkar. Það er sú eina af lýsistærðunum fyrir miðju sem er fjallað um í þessari bók sem er hægt er að nota til að lýsa óröðuðum flokkabreytum. Hins vegar er ekki við hæfi að reikna tíðasta gildið þegar mældar eru samfelldar talnabreytur.

4.5. Tíðasta gildi (mode)

Gerum ráð fyrir því að við höfum n mælingar $x_1, x_2, ... x_n$. *Tíðasta gildið* er sú útkoma sem oftast kemur fyrir í mælingunum okkar. Ef fleiri en ein tala koma jafn oft (og oftast) fyrir eru þær allar tíðustu gildin.

Sýnidæmi 4.2: Tíðasta gildi
Við höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 2, 3, 5, 9, 9, 15.` Hvert er tíðasta gildið?

Tíðustu gildin eru 2 og 9.

4.2.3. Miðgildi

Miðgildi er sú mæling sem er í miðju mælisafnsins ef þeim er raðað í stærðarröð. Helmingur mælinga í safninu eru minni en miðgildið og helmingur er stærri. Útlagar hafa lítil sem engin áhrif á miðgildi og einnig gefur það góða mynd af miðju mælinganna þó dreifing þeirra sé skekkt. Miðgildi er því mikið notað til að lýsa miðju mælinga. Miðgildi má nota til að lýsa öllum talnabreytum en einnig röðuðum flokkabreytum.

4.6. Miðgildi (median)

Gerum ráð fyrir því að við höfum n mælingar $x_1, x_2, ...x_n$. Byrjum á að raða þessum mælingum upp í stærðarröð, frá minnsta gildi upp í stærsta gildið. Reiknum svo

$$\text{Sæti í röð} = 0.5 \cdot (n+1). \tag{4.2}$$

Miðgildi er oft táknað með M. Það fer eftir því hvort n sé oddatala eða slétt tala hvernig við reiknum út miðgildið.

- Ef n er oddatala þá er miðgildið staðsett í sæti $0.5 \cdot (n+1)$ í röðinni.
- Ef n er slétt tala þá er miðgildið meðaltalið af þeim tveimur mælingum sem standa við sæti $0.5 \cdot (n+1)$ í röðinni.

VARÚÐ: $0.5 \cdot (n+1)$ er númerið á sætinu í röðinni, ekki miðgildið sjálft!

Sýnidæmi 4.3: Miðgildi - n er oddatala
Við höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15`. Finnið miðgildið.

Mælingarnar eru í réttri röð, þ.e.a.s frá lægsta gildi og upp í hæsta gildi. Við reiknum út sæti í röð með jöfnu (4.2).

$$\text{Sæti í röð} = 0.5 \cdot (n+1) = 0.5 \cdot 8 = 4.$$

og þá fæst að miðgildið stendur í sæti númer 4. Miðgildið er því, $M = 5$.

Sýnidæmi 4.4: Miðgildi - n er slétt tala
Við höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15, 17`. Finnið miðgildið.

Mælingarnar eru í réttri röð, þ.e.a.s frá lægsta gildi og upp í hæsta gildi. Við reiknum út sæti í röð með jöfnu (4.2).

$$\text{Sæti í röð} = 0.5 \cdot (n+1) = 0.5 \cdot 9 = 4.5.$$

miðgildið er því meðaltalið af tölunum sem standa í 4. og 5. sæti. Miðgildið er því, $M = \frac{5+9}{2} = 7$.

4.2.4. Meðaltal

Meðaltal er án vafa algengasta lýsistærðin fyrir miðju mælinga. Þó er það viðkvæmt fyrir útlögum og einnig gefur það ekki rétta mynd af miðju mælinganna ef dreifing þeirra er skekkt. Meðaltal er eingöngu hægt að reikna fyrir talnabreytur.

4.7. Meðaltal (mean, arithmetic mean)

Gerum ráð fyrir því að við höfum n mælingar $x_1, x_2, \ldots x_n$. *Meðaltalið* fæst með því að leggja mælingarnar saman og deila í með fjölda mælinga.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{4.3}$$

Táknið $\sum$ kallast summutákn og er notað til að lýsa summu talna. Sem dæmi má nefna er $\sum_{i=1}^{3} x_i$ það sama og $x_1 + x_2 + x_3$. Stærðin $\sum_{i=1}^{n} x_i$ táknar summu allra mælinga x_i með ótilgreindan vísi i, sem tekur fyrst gildið 1 þá 2 og svo öll heiltölugildi upp í n. Það er, $\sum_{i=1}^{n} x_i$ er það sama og $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Sýnidæmi 4.5: Summutákn og vísar
Finnið $\sum_{i=4}^{7} x_i$.

$\sum_{i=4}^{7} x_i = x_4 + x_5 + x_6 + x_7$.

Sýnidæmi 4.6: Meðaltal
Við höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15`. Finnið meðaltal mælinganna.

Við notum jöfnu (4.3) og reiknum

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{1+2+3+5+9+9+15}{7} = \frac{44}{7} = 6.29.$$

4.2.5. Vegið meðaltal

Þegar meðaltal er reiknað eins og hér að ofan, með jöfnu (4.3), fá allar mælingarnar sama vægi. Í sumum tilfellum viljum við gefa mælingunum misjafnt vægi, þá er talað um *vegið meðaltal*. Vegið meðaltal er eingöngu reiknað fyrir talnabreytur.

4.8. Vegið meðaltal (weighted mean)

Gerum ráð fyrir því að við höfum n mælingar $x_1, x_2, \ldots x_n$ og vægi þeirra $w_1, w_2, \ldots w_n$. Vegið meðaltal er reiknað sem

$$\bar{x}_w = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \ldots w_n \cdot x_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i} \tag{4.4}$$

Sýnidæmi 4.7: Vegið meðaltal
Gunnar landfræðinemi hefur lokið eftirfarandi námskeiðum og hlotið einkunnirnar sem sjá má hér að neðan. Einnig er tekið fram hversu margar einingar námskeiðin eru.

Námskeið	Einkunn	Einingafjöldi
Náttúrulandfræði	7	8
Kortagerð	9	8
Mannvistarlandfræði	7	8
Vinnulag í landfræði og ferðamálafræði	8	6
Eðlisfræði G	6	8
Jarðfræði 2A	9	8
Fólksfjöldabreytingar	9	6
Tölfræði	10	8

Hver er meðaleinkunn Gunnars landfræðinema ef tekið er tillit til mismunandi einingafjölda námskeiðanna, þ.e.a.s hver er vegin meðaleinkunn Gunnars landfræðinema?

Til að reikna út vegið meðaltal einkunnanna notum við jöfnu (4.4). x-in í jöfnunni eru einkunnirnar og w-in vægin (við viljum gefa einkunnunum misjafnt vægi eftir því hversu margar einingar námskeiðin eru). Við setjum inn í jöfnuna og fáum

$$\bar{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^n w_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} = \frac{8\cdot 7+8\cdot 9+8\cdot 7+6\cdot 8+8\cdot 6+8\cdot 9+6\cdot 9+8\cdot 10}{8+8+8+6+8+8+6+8} = 8.10.$$

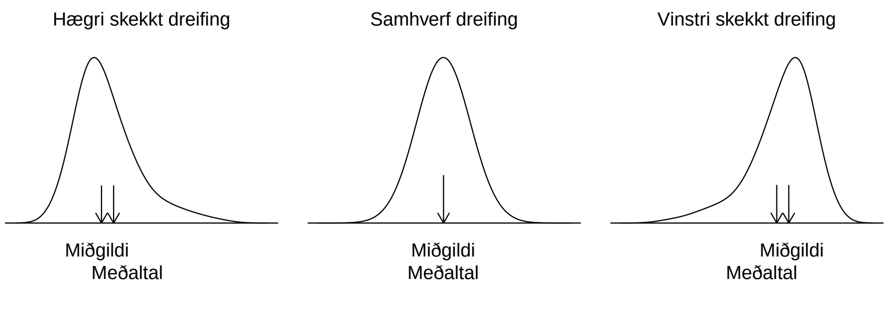
4.2.6. Samanburður á meðaltali og miðgildi

Meðaltal og miðgildi eru þær lýsistærðir sem oftast eru notaðar til að lýsa miðju gagna. Það er gagnlegt að skoða gögnin myndrænt og reyna að átta sig á dreifingu gagnanna (sjá kafla 3.2.2) áður en ákvörðun er tekin um hvaða lýsistærð lýsir miðju gagnanna best. Sé dreifingin skekkt, tvíkryppu- eða fjölkryppudreifing er meðaltal ekki góður mælikvarði á miðju. Í þessum tilvikum er miðgildið betri kostur. Sé dreifingin nálægt því að vera samhverf eru meðaltalið og miðgildið svipuð og jöfn ef dreifingin er alveg samhverf.

4.9. Samanburður á meðaltali og miðgildi

- Ef dreifingin er skekkt til hægri er meðaltalið hærra en miðgildið.
- Ef dreifingin er samhverf er meðaltalið og miðgildið það sama.
- Ef dreifingin er skekkt til vinstri er meðaltalið lægra en miðgildið.

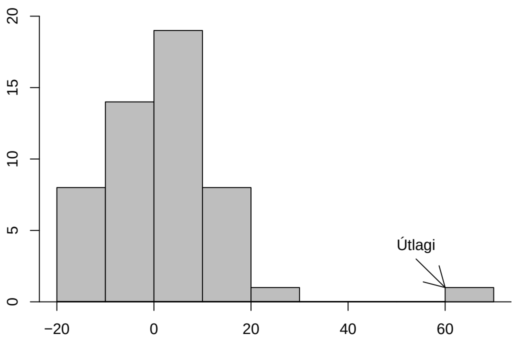
Þetta má sjá á mynd 4.1



Mynd 4.1: Samanburður á meðaltali og miðgildi

Útlagar geta haft mikil áhrif á meðaltal. Hins vegar hafa þeir ekki mikil áhrif á miðgildi og því er miðgildi betri mælikvarði á miðju gagna ef útlagar eru í gagnasafninu.

Hér að neðan má sjá stuðlarit af gagnasafni sem inniheldur útlaga. Við hlið stuðlaritsins hefur meðaltal og miðgildi safnsins verið reiknað með og án útlagans. Sjá má að meðaltalið stækkar um 1.35 á meðan miðgildið stækkar eingöngu um 0.03.



Meðaltal með útlaga = 2.77
Meðaltal án útlaga = 1.42
Miðgildi með útlaga = 1.79
Miðgildi án útlaga = 1.76

4.3. Lýsistærðir fyrir breytileika

Þið hafið nú séð nokkrar ólíkar aðferðir til að finna miðju mælinga. Valið á hverri þeirra við beitum veltur á dreifingu gagnanna. Annar áhugaverður og oft og tíðum ekki síður mikilvægur eiginleiki sem við viljum kanna er *breytileiki* gagnanna en breytileiki er sá eiginleiki sem hvað mest er notaður til að meta breytileika mælinganna sem við erum að skoða.

4.10. Breytileiki mælinga (spread)

Breytileiki mælinga er aðferð sem lýsir því hversu nálægt miðju sinni mælingarnar liggja.

Það eru til margar aðferðir til að lýsa breytileika mælinga sem henta mælingum misvel, líkt og aðferðirnar sem lýsa miðju mælinga. Þar sem breytileiki lýsir því hversu nálægt miðjunni mælingarnar liggja er val á lýsistærð fyrir breytileika háð því hvaða lýsistærð er notuð fyrir miðju mælinganna. Til dæmis er ekki við hæfi að nota lýsistærð sem lýsir fjarlægð mælinga frá meðaltali ef miðgildi var notað til lýsa miðju þeirra. Þær lýsistærðir sem við munum fjalla um eru

1. Spönn/dreifisvið (range)
2. Fjórðungamörk (quartiles)
3. Fimm tölu samantekt (five number summary)
4. Fjórðungaspönn (interquartile range)

5. Prósentumörk (percentiles)
6. Dreifni/fervik (variance)
7. Staðalfrávik (standard deviation)
8. Fráviksshlutfall (coefficient of variation)

4.3.1. Spönn

Spönn er mismunur stærstu og minnstu mælingarinnar. Hún er því mjög viðkvæm fyrir útlögum og þar að auki er hún eingöngu reiknuð út frá tveimur af mælingunum okkar. Gildi allra hinna mælingana skipta engu! Spönn verður því að teljast heldur rýr mælikvarði á breytileika mælinga, líkt og miðja spannar getur verið ófýsilegur mælikvarði á miðju mælinga. Hins vegar er spönn auðskiljanleg flestu fólki sama hve litla tölfræðiþekkingu það hefur og þannig má nota hana til að gefa breiðum hópi fólks mynd af dreifingu mælinga með fljótlegum hætti. Af þeim sökum er spönn afar mikið notuð í fjölmiðlum, eins og að tveimur tímum hafi munað á fyrsta og síðasta keppanda í langhlaupi. Spönn má reikna fyrir allar talnabreytur en einnig raðaðar flokkabreytur.

4.11. Spönn (range)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar $x_1, x_2, \dots x_n$ og látum x_{min} tákna þá minnstu og x_{max} þá stærstu. *Spönn* gagnanna er reiknuð með

$$\text{Spönn} = x_{\text{max}} - x_{\text{min}} \tag{4.5}$$

Sýnidæmi 4.8: Spönn

Höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15`. Reiknið spönn mælinganna.

Við reiknum spönn gagnanna með jöfnu (4.5) og fáum

$$\text{Spönn} = x_{\text{max}} - x_{\text{min}} = 15 - 1 = 14.$$

4.3.2. Fjórðungamörk

Sé miðgildi notað til að lýsa miðju mælinga er yfirleitt við hæfi að nota *fjórðungamörk* til að lýsa breytileika þeira. Fjórðungamörkin eru þrjú og er algengt að kalla þau, Q_1, Q_2 og Q_3. Í sumum kennslubókum og ritum eru fjórðungamörkin kölluð $Q_{25\%}, Q_{50\%}$ og $Q_{75\%}$. Við munum halda okkur við fyrri ritháttinn í þessari bók.

Q_1: Um fyrsta fjórðungamarkið gildir að 25% af mælingunum eru lægri en Q_1. Q_1 er því miðgildi neðri helmings mælinganna, að undanskildu miðgildinu.

Q_2: Um annað fjórðungamarkið gildir að 50% af mælingunum eru lægri en Q_2. Q_2 er því miðgildið , $Q_2 = M$.

Q_3: Um þriðja fjórðungamarkið gildir að 75% af mælingunum eru lægri en Q_3. Q_3 er því miðgildi efri helmings mælinganna, að undanskildu miðgildinu.

Til eru nokkrar aðferðir við að reikna fjórðungamörk en við munum halda okkur við eftirfarandi aðferð þegar við reiknum fjórðungamörkin í höndunum. Tölfræðihugbúnaðir nota oft aðeins flóknari aðferðir en niðurstöðurnar eru yfirleitt mjög svipaðar. Fjórðungamörk má reikna fyrir allar talnabreytur sem og raðaðar flokkabreytur.

4.12. Fjórðungamörk (quartiles)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar $x_1, x_2, ...x_n$. Byrjum á að raða mælingum upp í stærðarröð, frá lægsta gildinu upp í hæsta gildið. Reiknum svo

$$\begin{aligned} Q_1 \text{ - sæti í röð:} &= 0.25 \cdot (n+1) \\ Q_2 \text{ - sæti í röð:} &= 0.50 \cdot (n+1) \\ Q_3 \text{ - sæti í röð:} &= 0.75 \cdot (n+1) \end{aligned} \tag{4.6}$$

- Q_1 er mælingin sem stendur í sæti $0.25 \cdot (n+1)$ eða meðaltalið af þeim tveimur mælingum sem standa við sæti $0.25 \cdot (n+1)$ í röðinni.
- Q_2 er mælingin sem stendur í sæti $0.50 \cdot (n+1)$ eða meðaltalið af þeim tveimur mælingum sem standa við sæti $0.50 \cdot (n+1)$ í röðinni.
- Q_3 er mælingin sem stendur í sæti $0.75 \cdot (n+1)$ eða meðaltalið af þeim tveimur mælingum sem standa við sæti $0.75 \cdot (n+1)$ í röðinni.

Sýnidæmi 4.9: Fjórðungamörk
Við höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15, 17`. Finnið fjórðungamörk mælinganna.

Mælingarnar eru í réttri röð, þ.e.a.s frá lægsta gildi og upp í hæsta gildi. Við byrjum því á að reikna í hvaða sæti gildin sem við þurfum til að reikna fjórðungamörkin sitja í. Til þess notum við jöfnu (4.6):

$$\begin{aligned} Q_1 \text{ - sæti í röð: } 0.25\cdot(n+1) &= 0.25\cdot 9 = 2.25 \\ Q_2 \text{ - sæti í röð: } 0.50\cdot(n+1) &= 0.50\cdot 9 = 4.50 \\ Q_3 \text{ - sæti í röð: } 0.75\cdot(n+1) &= 0.75\cdot 9 = 6.75 \end{aligned}$$

Þá fæst að Q_1 er meðaltal gildanna sem standa í sætum 2 og 3. Tölurnar sem standa í sætum 2 og 3 eru 2 og 3 og við fáum

$$Q_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5.$$

Q_2 er meðaltal gildanna sem standa í sætum 4 og 5. Tölurnar sem standa í sætum 4 og 5 eru 5 og 9 og við fáum

$$Q_2 = \frac{5+9}{2} = 7.$$

Q_3 er meðaltal gildanna sem standa í sætum 6 og 7. Tölurnar sem standa í sætum 6 og 7 eru 9 og 15 og við fáum

$$Q_3 = \frac{9+15}{2} = 12.$$

4.3.3. Fimm tölu samantekt

Fimm tölu samantekt er afar hnitmiðuð og fljótleg leið til að gefa miklar upplýsingar um bæði miðju og breytileika gagnanna. Fyrir vikið er hún mikið notuð.

4.13. Fimm tölu samantekt (five-number summary)

Fimm-tölu samantekt samanstendur af minnsta gildi (min), fjórðungamörkunum og stærsta gildi (max), þ.e.a.s

$$\min,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3,\ \max$$

Sýnidæmi 4.10: Fimm tölu samantekt
Höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15, 17`. Við fundum fjórðungamörkin í dæmi 4.9 og er þau: $Q_1 = 2.5$, $Q_2 = 7$ og $Q_3 = 12$.

Fimm-tölu samantekt gagnasafnsins er því:

$$\min = 1, \; Q_1 = 2.5, \; Q_2 = 7, \; Q_3 = 12 \text{ og } \max = 17.$$

4.3.4. Fjórðungaspönn

Fjórðungaspönn er reiknuð út frá fjórðungamörkunum, nánar til tekið mismunur fyrsta og þriðja fjórðungamarksins. Líkt og fjórðungamörkin ætti því að nota hana þegar miðgildi en ekki meðaltal er notað til að lýsa miðju mælinganna. Ólíkt spönn er fjórðungaspönn ekki viðkvæm fyrir útlögum og því mun áreiðanlegri mælikvarði á breytileika mælinga. Fjórðungaspönn er eingöngu við hæfi að reikna fyrir talnabreytur en ekki raðar flokkabreytur.

4.14. Fjórðungaspönn (interquartile range)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar $x_1, x_2, ... x_n$ og látum Q_1 tákna fyrsta fjórðungamark og Q_3 þriðja fjórðungamark. *Fjórðungaspönn* gagnanna er táknuð með IQR og reiknuð með

$$IQR = Q_3 - Q_1. \tag{4.7}$$

Sýnidæmi 4.11: Fjórðungaspönn
Höfum eftirfarandi mælingar: `1, 2, 3, 5, 9, 9, 15, 17`. Finnið fjórðungaspönn mælinganna.

Við sáum í dæmi 4.9 að $Q_1 = 2.5$ og $Q_3 = 12$. Við notum nú jöfnu (4.7) til að finna fjórðungaspönn gagnanna:

$$IQR = 12 - 2.5 = 9.5.$$

4.3.5. Prósentumörk

Hugmyndin að baki *prósentumörkum* (percentiles) er svipuð og sú að baki fjórðungamörkum nema í stað þess að skoða eingöngu mörkin við 25 % eða 75 % mælinganna getum við leyft hvaða hlutfall sem er.

4.15. Prósentumörk (percentile)

Með $a\%$ prósentumörkum er átt við þá tölu sem er þannig að $a\%$ mælinganna hafa lægra gildi en sú tala.

Með 10% prósentumörkum er þá átt við þá tölu sem er þannig að 10% mælinganna hafa lægra gildi en sú tala. Sé til dæmis 10% prósentumarkið talan 8 þá eru 10% mælinganna lægri en 8. Líkt og með fjórðungamörkin eru nokkrar ólíkar leiðir til þess að reikna prósentumörk og er það nær aldrei gert „ í höndunum” heldur er notast við tölfræðihugbúnað. Prósentumörk má reikna fyrir talnabreytur sem og raðaðar flokkabreytur.

4.3.6. Dreifni

Dreifni lýsir fjarlægð mælinga frá meðaltali þeirra. Því er eingöngu við hæfi að nota dreifni sem mælikvarða á breytileika þegar meðaltal hefur verið notað til að lýsa miðju mælinganna. Þar af leiðandi er eingöngu hægt að reikna dreifni fyrir talnabreytur.

4.16. Dreifni (variance)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar $x_1, x_2, \ldots x_n$. Dreifni mælinga er táknuð s^2 og er reiknuð með

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} \tag{4.8}$$

$s^2 = 0$ þá og því aðeins að allar mælingarnar séu jafnar, annars er s^2 ávallt stærra en 0. Því lengra sem mælingarnar liggja frá meðaltalinu því hærra verður s^2.

Til að reikna *dreifni* þurfum við að:

1. Reikna meðaltal mælinganna
2. Draga meðaltalið frá sérhverri mælingu
3. Hefja allar útkomurnar úr lið 2 í annað veldi
4. Leggja saman allar útkomurnar í lið 3
5. Deila útkomunni í lið 4 með n-1.

Sýnidæmi 4.12: Dreifni
Höfum eftirfarandi mælingar: `2, 2, 3, 5, 8`. Finnið dreifni mælisafnsins.

Við byrjum á að finna meðaltalið og notum til þess jöfnu (4.3)

$$\bar{x} = \frac{2+2+3+5+8}{5} = \frac{20}{5} = 4.$$

Gerum nú litla töflu. Fyrsti dálkurinn í töflunni inniheldur gögnin. Í dálki tvö er meðaltal gagnasafnsins dregið frá mælingunum línu fyrir línu. Í þriðja dálknum er talan í dálki númer tvö hafin í annað veldi og í síðustu línu dálksins eru allar tölur dálksins lagðar saman. Þetta er talan í teljaranum í jöfnu (4.8).

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
2	2-4 = -2	4
2	2-4 = -2	4
3	3-4 = -1	1
5	5-4 = 1	1
8	8-4 = 4	16
$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$	=	26

Til að reikna dreifnina þurfum við að lokum að deila með $(n-1)$ samkvæmt jöfnu (4.8).

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{26}{4} = 6.5.$$

4.3.7. Staðalfrávik

Staðalfrávik mælinga er einfaldlega kvaðratrótin af dreifni þeirra. Því ætti, líkt og með dreifnina, eingöngu að nota staðalfrávik þegar meðaltal er notað til að lýsa miðju gagna. Því má eingöngu reikna staðalfrávik fyrir talnabreytur. Staðalfrávik er sennilega mest notaða lýsistærðin fyrir breytileika mælinga og því mikilvægt að ná góðum tökum og skilningi á meðferð hennar.

4.17. Staðalfrávik (standard deviation)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar $x_1, x_2, ... x_n$. Staðalfrávik mælinga er táknað með s og er reiknað með

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \tag{4.9}$$

s = 0 þá og því aðeins að allar mælingarnar eru jafnar, annars er s ávallt stærra en 0. Því lengra sem mælingarnar liggja frá meðaltalinu því hærra verður s.

Til að reikna *staðalfrávik* þurfum við að:

1. Reikna dreifnina með því að nota jöfnu (4.8)
2. Taka kvaðratrót af dreifninni

Sýnidæmi 4.13: Staðalfrávik
Höfum eftirfarandi mælingar: `2, 2, 3, 5, 8`. Finnið staðalfrávik mælisafnsins.

Við þurfum að byrja á að finna dreifni mælisafnsins en þar sem þetta eru sömu tölur og í dæmi 4.12 höfum við nú þegar reiknað hana, $s^2 = 6.5$. Staðalfrávikið finnum við nú með því að taka kvaðratrót af dreifninni skv. jöfnu (4.9).

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6.5} = 2.55.$$

4.3.8. Frávikshlutfall

Það er oft erfitt að bera saman staðalfrávik gagna þegar mælingarnar eru í misjöfnum mælieiningum eða meðaltal þeirra er mjög frábrugðið. Í þeim tilvikum reiknum við frávikshlutfall til að bera saman breytileika tveggja eða fleiri hópa. Það er táknað með CV.

4.18. Frávikshlutfall (coefficient of variation)

Frávikshlutfall reiknum við með

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Eftir því sem CV er hærra því breytilegri eru gögnin.

4.3.9. Samanburður á lýsistærðum fyrir breytileika

Dreifni og staðalfrávik eru notuð til að lýsa breytileika mælinganna umhverfis meðaltalið og á aðeins að nota þegar meðaltal er notað sem mælikvarði á miðju. Staðalfrávik er yfirleitt notað fram yfir dreifni þar sem mælieiningin á staðalfrávikinu er sú sama og á mælingunum (hugsið ykkur að ef mælingarnar okkar eru í metrum, m, þá er staðalfrávikið í einingunni m en dreifnin í m^2). Staðalfrávik er viðkvæmt fyrir skekkingu og útlögum. Aðeins fáir útlagar geta gert staðalfrávikið mjög hátt. Séu mælingarnar skekktar eða ef útlagar eru til staðar er fimm tölu samantekt besti mælikvarðinn á breytileika gagnanna.

4.4. Fylgnistuðull

Við höfum nú séð fjölmargar leiðir til að lýsa miðju og breytileika einstakra samfelldra talnabreyta. Nú er komið að því að skoða fleira en eina breytu í einu. *Fylgnistuðull úrtaks* eða einfaldlega *fylgni* er lýsistærð sem lýsir sambandi tveggja samfelldra talnabreyta. Fylgnistuðul getum við eingöngu notað til að lýsa *línulegu sambandi* (kassi 4.4.1). Til að átta okkur á því skulum við fyrst rifja upp jöfnu beinnar línu.

4.4.1. Jafna beinnar línu

4.19. Jafna beinnar línu (straight line equation)

Jafna beinnar línu lýsir línulegu sambandi tveggja breyta, y og x. Jöfnuna má skrifa sem

$$y = \beta_0 + \beta_1 x \tag{4.10}$$

þar sem β_0 er *skurðpunktur* (intercept) línunnar við y-ás og β_1 er *hallatala* (slope) línunnar.

β_0 er því jafnt gildinu á y þegar gildið á x er jafnt og núll og β_1 segir okkur hversu mikið y breytist við einnar einingar breytingu á x.

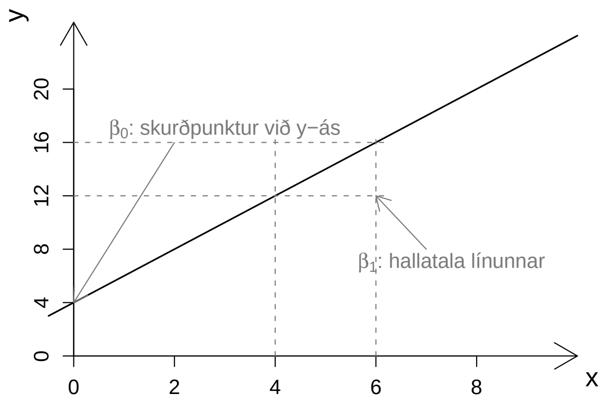
Reikna má út hallatöluna með því að velja sér tvo punkta á línunni, (x_1, y_1) og (x_2, y_2) og reikna

$$\beta_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Á mynd 4.2 má sjá beina línu og hvernig lesa má úr gildi skurðpunkts og hallatölu línunnar.

4.20. Línulegt samband

Við segjum að samband tveggja breyta sé *línulegt* (linear) ef nota má jöfnu beinnar línu til spá fyrir um gildi annarrar breytunnar breytunnar út frá gildi hinnar. Breytan á x-ás kallast óháða breytan en breytan á y- ás kallast háða breytan.



Mynd 4.2: Jafna beinnar línu

4.4.2. Fylgnistuðull úrtaks

.

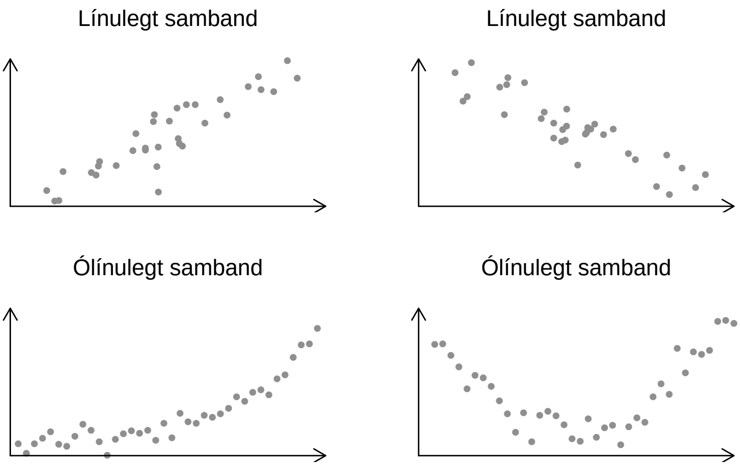
4.21. Fylgnistuðull úrtaks (sample coefficient of correlation)

Gerum ráð fyrir að við höfum n mælingar á tveimur breytum x og y. Táknum meðaltal og staðalfrávik x breytunnar með $\bar{x}$ og s_x og meðaltal og staðalfrávik y breytunnar með $\bar{y}$ og s_y. Fylgnistuðul úrtaksins reiknum við með

$$r = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i-\bar{y}}{s_y}\right).$$

Fylgnistuðullinn r er alltaf á bilinu -1 til 1. Sé hann nálægt núlli segjum við að það sé lítil fylgni milli breytanna en sé hann nálægt 1 eða -1 segjum við að það sé mikil fylgni milli þeirra.

Mikilvægt er að muna að fylgni og fylgnistuðull eru aðeins mælikvarðar á **línulegt** samband. Það getur verið skýrt samband á milli tveggja breyta þó það sé ekki endilega línulegt. Skoðum nú aftur mynd 4.3. Eðlilegt væri að nota r til að mæla samband breytanna á efri myndunum tveimur þar sem um er að ræða línulegt samband (jákvætt til vinstri en neikvætt til hægri) en ekki á myndunum fyrir neðan þar sem sambandið er ólínulegt.



Mynd 4.3: Punktarit þar sem samband breyta er línulegt (að ofan) og ólínulegt (að neðan)

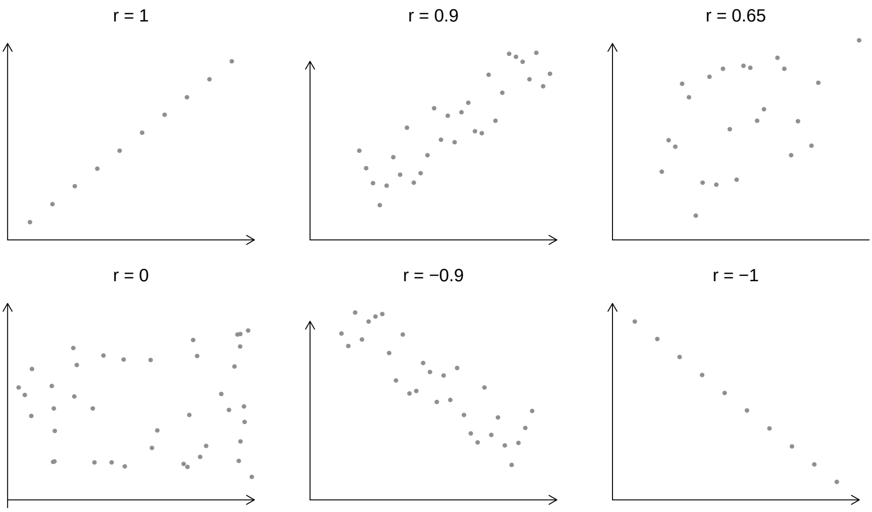
4.4.3. Stefna og styrkleiki línulegs sambands

4.22. Stefna línulegs sambands
Formerki fylgnistuðulsins segir til um það hver *stefna* línulegs sambands er. Hún er annað hvort jákvæð eða neikvæð. Ef fylgnistuðull tveggja breyta er jákvæður segjum við að fylgni þeirra sé *jákvæð*. Ef fylgnistuðull tveggja breyta er neikvæður segjum við að fylgni þeirra sé *neikvæð*.

Þegar fylgni er jákvæð stækka gildi háðu breytunnar þegar gildi óháðu breytunnar stækka. Þegar fylgni er neikvæð minnka gildi háðu breytunnar þegar gildi óháðu breytunnar stækka.

4.23. Styrkleiki línulegs sambands
Algildi (absolute value) fylgnistuðuls lýsir *styrkleika* línulega sambandsins sem gildir milli breytanna. Hann segir okkur hversu vel við getum ákvarðað gildi svarbreytunnar út frá gildi skýribreytunnar.

Gætið ykkar á því að styrkleiki línulegs sambands segir ekkert til um það hversu mikið háða breytan stækkar eða minnkar eftir því sem óháða breytan stækkar heldur



Mynd 4.4: Punktarit fyrir mismunandi gildi á r

eingöngu hversu gott sambandið er. Ef $r = 0$ er ekkert línulegt samband á milli breytanna. Ef $r = -1$ eða $r = 1$ vitum við nákvæmlega hvert gildi háðu breytunnar verður ef við þekkjum gildi óháðu breytunnar. Þegar $r = -1$ segjum við að *fullkomið neikvætt* samband gildi milli breytanna en ef $r = 1$ segjum við að sambandið sé *fullkomið jákvætt*. Því lengra sem r liggur frá 0 (í báðar áttir) því sterkari er fylgnin, það er þeim betur getum við spáð fyrir um gildi háðu breytunnar út frá gildi óháðu breytunnar. Á mynd 4.4 má sjá nokkur punktarit þar sem stefna og styrkleiki fylgni breytanna er mismunandi.

Orsakasamband (causation) er til staðar þegar breyting á einni breytu **veldur** breytingu í annarri breytunni eins og rætt var um í kafla 2.6. Oft má finna sterka fylgni á milli breyta þó svo að orsakasamband sé ekki til staðar. Í mörgum tilfellum eru breyturnar þá undir áhrifum þriðju breytunnar sem þá er kölluð *dulin breyta* (lurking variable). Sem dæmi má nefna að fylgni má finna á milli fjölda seldra ísa og fjölda seldra fellihýsa. Það er nokkuð ljóst að það að margir ísar séu seldir veldur ekki að mörg fellihýsi seljist (eða öfugt). Hér er ekki um orsakasamband að ræða heldur eru báðar breyturnar háðar þriðju breytunni, hitastigi sem er dulin breyta. Því dugar há fylgni aldrei ein og sér til að fullyrða að orsakasamband sé á milli tveggja breyta. Varist að draga ályktanir um orsakasamband á þeirri forsendu að fylgni sé milli breytanna.

4.5. Lýsistærðir fyrir samband hlutfalla

Nú höfum við séð hvernig fylgni lýsir sambandi tveggja samfelldra talnabreyta. Þegar um samband tveggja strjálla breyta er að ræða hins vegar af mörgum lýsistærðum að taka. Sú fyrsta sem við kynnumst er *áhættuhlutfall*.

4.5.1. Áhættuhlutfall

Áhættuhlutfall (relative risk) er mikið notað þegar borin eru saman hlutföll í tveimur þýðum. Þá hefur annað þýðið yfirleitt tiltekinn eiginleika sem verið er að athuga en hitt þýðið er viðmiðunarþýði af einhverri gerð. Dæmi um slíkt er að bera saman algengi lungnakrabbameins hjá reykingafólki og þeim sem ekki reykja. Hér er „áhugaverði" eiginleikinn reykingar en breytan sem er mæld er segir hvort viðkomandi sé með lungnakrabbamein eða ekki. Áhættuhlutfall er sér í lagi mikið notað þegar annað þýðið hlýtur eitthvert ákveðið inngrip en hitt þýðið hlýtur lyfleysumeðferð (sjá kassa 2.5.1).

4.24. Áhættuhlutfall (relative risk)

Áhættuhlutfall, táknað RR, er hlutfall breytu í þýðinu með eiginleikann sem verið er að athuga, táknað p_1, deilt með hlutfalli sömu breytu í viðmiðunarþýðinu, táknað p_2.

$$RR = \frac{p_1}{p_2} \tag{4.11}$$

Með því að skoða áhættuhlutfall erum við því að leiðrétta fyrir lyfleysuáhrifum eða öðrum utanaðkomandi áhrifum sem eru til staðar hjá bæði viðmiðunarþýðinu og þýðinu með eiginleikann sem við höfum áhuga á.

4.25. Túlkun áhættuhlutfalls

- Sé RR = 1 er hlutfallið það sama í þýðunum tveimur.
- Sé RR <1 er hlutfallið minna hjá þýðinu með áhugaverða eiginleikann en í viðmiðunarþýðinu.
- Sé RR >1 er hlutfallið meira hjá þýðinu með áhugaverða eiginleikann en í viðmiðunarþýðinu.

Gögn af þessu tagi eru oft sett upp í 2x2 töflur líkt og töflu 4.1. Þar sem við erum að skoða hlutföll tölum við til einföldunar um að mælingarnar sé „með" eða „án" breytunnar sem verið er að skoða. Ef við táknum fjölda mælinga með breytuna í

	Áhugavert þýði	Viðmiðunarþýði
	a	c
	b	d
Alls	a+b	c+d

Tafla 4.1: Framsetning mælinga þegar áhættuhlutfall og/eða gagnlíkindi eru könnuð.

áhugaverða þýðinu með a, fjölda mælinga án hennar í sama þýði b, fjölda mælinga með breytuna í viðmiðunarþýðinu c og fjölda mælinga án hennar með d þá verður áhættuhlutfallið einfaldlega talan $\frac{a}{a+b}/\frac{c}{c+d}$.

Sýnidæmi 4.14: Áhættuhlutfall
Birna Margrét kannar hvort höfuðverkir séu algengari meðal skokkara en annarra. Hún velur 80 skokkara, skráða í hlaupahópa í Reykjavík, af handahófi. Meðal þeirra reynast 8 sem fá höfuðverki á tveggja vikna fresti eða oftar. Til viðmiðunar valdi hún 80 einstaklinga úr þjóðskrá af svipuðu aldursbili og spurði þá um tíðni höfuðverkja. Af þeim reyndust 16 fá höfuðverki á tveggja vikna fresti eða oftar. Hvert er áhættuhlutfall þess að fá höfuðverki eftir því hvort fólk skokkar reglulega eða ekki?

	Skokkarar	Aðrir
Fá tíða höfuðverki	8	16
Fá ekki tíða höfuðverki	72	64
Alls	80	80

Áhættuhlutfallið er

$$\frac{8}{80}/\frac{16}{80} = 0.1/0.2 = 0.5 \tag{4.12}$$

Skokkar eru því 50 % ólíklegri til að þjást af tíðum höfuðverkjum heldur en þeir sem ekki skokka.

4.5.2. Gagnlíkindahlutfall

Gagnlíkindahlutfall (odds ratio) er notað við sömu aðstæður og áhættuhlutfall. Það hefur hins vegar þann kost fram yfir áhættuhlutföllin að gera minni kröfur um tilraunahögun þegar gögnunum er safnað. Þegar við notum áhættuhlutföll erum við að túlka líkur þess að einstaklingar í einu þýði hljóti tiltekna breytu gagnvart líkum einstaklinga í öðru þýði á að hljóta breytuna. Til að meta þær líkur þurfum við að velja einstaklinga af handahófi úr hvoru þýði fyrir sig. Slíkt getur verið afar óhentugt þegar fjöldi viðfangsefna sem hljóta breytuna ef mjög lágt. Sem dæmi má nefna ef breytan sem við erum að kanna er hvort viðkomandi hafi heilaæxli eða ekki. Þar sem heilaæxli eru afar fátíð gætum við þurft að hafa gífulega stór úrtök til að meta líkurnar með góðum hætti.

Gagnlíkindahlutföll leyfa okkur hins vegar að snúa úrtakshöguninni „á hvolf”. Þegar við reiknum gagnlíkindahlutföll erum við ekki að meta líkur og vegna þess hvernig þau eru reiknuð getum við leyft okkur að velja einstaklinga af handahófi eftir því hvaða gildi breytunnar þeir hljóta (en ekki hvoru þýðinu þeir tilheyra). Við gætum sem dæmi valið 20 einstaklinga með heilaæxli og 20 einstaklinga ekki með heilaæxli og kannað hvoru þýðinu þeir tilheyra. Enn fremur gildir að ef líkurnar á að hljóta breytuna eru litlar verða áhættuhlutföll og gagnlíkindahlutföll svipuð svo gagnlíkindahlutföll geta hjálpað okkur að meta áhættuhlutfallið í þeim tilvikum.

4.26. Gagnlíkindi (odds)

Ef líkurnar á að tiltekinn atburður eigi sér stað eru p, þá eru *gagnlíkindi* atburðarins, táknaðar með o reiknaðar með jöfnunni

$$o = \frac{p}{1-p} \tag{4.13}$$

Gagnlíkindahlutfall er hlutfall tveggja gagnlíkinda. Í stuttu máli má segja að *gagnlíkindi* (odds) séu líkurnar á því að tiltekinn atburður eigi sér stað deildar með líkunum á því að hann gerist ekki.

4.27. Gagnlíkindahlutfall (odds ratio)

Gagnlíkindahlutfall, táknað OR, eru gagnlíkindi breytu í þýðinu með eiginleikann sem verið er að athuga, táknað o_1, deildar með gagnlíkindum sömu breytu í viðmiðunarþýðinu, táknaðar o_2.

$$OR = \frac{o_1}{o_2} \tag{4.14}$$

Séu niðurstöðurnar settar fram eins og í töflu 16.1 verður gagnlíkindahlutfallið $\frac{a}{b}/\frac{c}{d} = ad/bc$. Líkt og þegar við skoðum áhættuhlutfall höfum við mestan áhuga á því að kanna hvort gagnlíkindahlutfallið sé stærra eða minna en einn, því það segir til um hvort þýðið hefur meiri gagnlíkindi á að „hljóta” breytuna eða ekki.

4.28. Túlkun gagnlíkindahlutfalls

- Sé OR = 1 eru gagnlíkindin þær sömu í þýðunum tveimur.
- Sé OR <1 eru gagnlíkindin minni hjá þýðinu með áhugaverða eiginleikann en í viðmiðunarþýðinu.
- Sé OR >1 eru gagnlíkindin meiri hjá þýðinu með áhugaverða eiginleikann en í viðmiðunarþýðinu.

Sýnidæmi 4.15: Gagnlíkindahlutfall
Svanhildur er að kanna hvort samband sé milli fitulifur og áfengissýki. Hún kannaði 100 handahófsvalda sjúklinga með fitulifur og komst að því að 75 þeirra voru áfengissjúkir. Hins vegar kannaði hún 100 handahófsvalda sjúklinga sem ekki höfðu greinst með fitulifur og reyndust 15 þeirra áfengissjúkir. Niðurstöður hennar eru því eftirfarandi:

	Áfengissjúkir	Ekki áfengissjúkir
Með fitulifur	75	25
Án fitulifur	15	85

Hvert er gagnlíkindahlutfall fitulifur fyrir áfengissjúka gagnvart þeim sem ekki eru áfengissjúkir?

Gagnlíkindahlutfallið er

$$\frac{75 \cdot 85}{15 \cdot 25} = \frac{6375}{375} = 17 \tag{4.15}$$

Svo áfengissjúkir hafa 17 sinnum meiri gagnlíkindi á að þróa með sér fitulifur heldur en þeir sem ekki eru áfengissjúkir.

4.6. Lýsistærðir fyrir flokkunaraðferðir

Að lokum munum við fjalla um tvö hugtök sem eru notuð til að lýsa gæðum flokkunaraðferða sem flokka viðfangsefni í tvo hópa. Flokkunaraðferð er í raun einhver aðferð sem við notum til að meta hvort viðfangsefni hafa tiltekinn eiginleika eða ekki. Við getum byggt flokkunaraðferðina á mælingum á nánast öllu milli himins og jarðar. Sem dæmi má nefna púls, hitastig við sjávarmál á miðnætti, fjöldi gesta eða hvað annað sem við kemur eiginleikanum og viðfangsefnunum sem við erum að skoða. Oftar en ekki byggja flokkurnaraðferðir á mælingum á fleiri en einni breytu.

	Með eiginleikann	Án eiginleikans
Flokkuð með eiginleikann	SJ	FJ
Ekki flokkuð með eiginleikann	FN	SN

Tafla 4.2: Sannar og falskar, jákvæðar og neikvæðar mælingar.

Hugtökin *næmi* (sensitivity) og *sértæki* specificity koma til kastanna þegar við höfum tök á að kanna nánar viðfangsefnin og sjá hvort flokkunaraðferðin hafi flokkað viðfangsefnin rétt. Mælingarnar okkar geta verið af fjórum toga, sannar eða falskar jákvæðar og sannar eða falskar neikvæðar.

4.29. Sannar og falskar, jákvæðar og neikvæðar mælingar

- Sannar jákvæðar (SJ): Mælingar sem eru **flokkaðar með** eiginleikann og hafa hann **í raun**.
- Falskar jákvæðar (FJ): Mælingar sem eru **flokkaðar með** eiginleikann en hafa hann **ekki í raun**.
- Sannar neikvæðar (SN): Mælingar sem eru **flokkaðar án** eiginleikans og hafa hann **ekki í raun**.
- Falskar neikvæðar (FN): Mælingar sem eru **flokkaðar án** eiginleikans en hafa hann **í raun**.

Mörgum finnst hugtökin skýrari þegar þau eru sett upp í litla töflu eins og töflu 4.2. Þá teljum við fjölda mælinga sem falla undir hvern og einn flokk.

4.30. Næmi (sensitivity)

Næmi flokkunaraðferðar er fjöldi sannra jákvæðra mælinga deildur með samanlögðum fjölda sannra jákvæðra og falskra neikvæðra mælinga.

$$\frac{SJ}{SJ+FN} \tag{4.16}$$

Næmi er því í raun hlutfall þeirra viðfangsefna sem flokkuð eru með eiginleikann af öllum þeim viðfangsefnum sem hafa hann í raun (hvort sem þau voru flokkuð með hann eða ekki). Hún segir okkur því hversu vel aðferðin *nemur* eða finnur þau viðfangsefni sem bera eiginleikann.

4.31. Sértæki (specificity)

Sértæki flokkunaraðferðar er fjöldi sannra neikvæðra mælinga deildur með samanlögðum fjölda sannra neikvæðra og falskra jákvæðra mælinga.

$$\frac{SN}{SN+FJ} \tag{4.17}$$

Sértæki er því í raun hlutfall þeirra viðfangsefna sem flokkuð eru án eiginleikans af öllum þeim viðfangsefnum sem eru í raun á hans (hvort sem þau voru flokkuð með hann eða ekki). Hún segir okkur því hversu vel aðferðinni gengur að flokka eingöngu þau sem viðfangsefni sem bera eiginleikann, með hann.

Sýnidæmi 4.16: Sértæki
Ingunn hefur mikinn áhuga á afbrotafræði. Hún vinnur með úrtak 40 manna sem öll voru ákærð í Héraðsdómi Reykjavíkur og búið er að úrskurða í málum þeirra. Dag einn birtist Harry Potter í heimsókn til hennar með galdratæki sem gerir henni kleift að sjá hvort einstaklingarnir höfðu í raun og veru framið þá glæpi sem þau voru ákærð fyrir. Í ljós kom að af 12 sakfelldum einstaklingum var 1 í raun saklaus. Hins vegar voru 8 einstaklingar ranglega sýknaðir. Tölfræðilega getum við litið svo á að Héraðsdómur sé að flokka einstaklinga með eiginleikann „sekur”.

Teljið fjölda sannra og falskra jákvæðra og neikvæðra flokkana hjá Héraðsdómi og setjið upp í litla töflu. Hvert er næmið og sértækið?

Niðurstöður Ingunnar eru eftirfarandi:

	Sek	Saklaus
Sakfelld	11	1
Sýknuð	8	20

Næmi Héraðsdóms er $11/(11+8) = 11/19$ sem er um það bil 0.58. Héraðsdómur hefur því numið 58 % sekra einstaklinga (það er, náð að sakfella 58 % þeirra sem voru í raun sekir).

Sértæki Héraðsdóms er $20/(20+1) = 20/21$ sem er um það bil 0.95. Héraðsdómur sýknar þvi 95 % allra sem saklausir eru.

Næmi og sértæki hanga saman að því leyti að eftir því sem næmi eykst þá minnkar sértækið og öfugt. Það fer eftir eðli þess eiginleika sem við erum að skoða hvort við viljum hafa næmið hátt á kostnað sértækisins eða öfugt. Ef það er brýnt að finna nær öll viðfangsefnin sem bera eiginleikann og það gerir lítið þó svo að viðfangsefni séu ranglega flokkuð með hann höfum við næmið mjög hátt. Ef það gerir minna til þó að viðfangsefni séu ranglega greind án eiginleikans viljum við yfirleitt hafa sértækið gott.

Tökum sem dæmi þegar verið er að skima eftir meðgöngusykursýki hjá verðandi mæðrum. Til þess eru oft notaðar þvagprufur. Ef þvagprufan greinir of mikinn sykur í þvagi er því fylgt eftir með sykurþolsprófi svo það er verðandi móður og barni að meinalausu þó svo að þvagprufan flokki móðurina ranglega með sykursýki. Hins vegar getur það verði barninu lífshættulegt ef sykursýki móðurinnar greinist ekki svo í þessu tilviki myndum við sætta okkur við lítið sértæki til að hafa næmið gott.

Tvö önnur hugtök, náskyld næmi og sértæki eru *jákvætt-* (positive-) og *neikvætt forspárgildi* (negative predictive value). Jákvæða forspárgildið er hlutfall mælinga sem reyndust hafa eiginleika af þeim mælingum sem voru flokkaðar með hann. Neikvæða forspárgildið er hlutfall mælinga sem reyndust ekki hafa eiginleika af þeim mælingum sem voru ekki flokkaðar með hann.

4.32. Jákvætt forspárgildi (positive predictive value)

Jákvætt forspárgildi flokkunaraðferðar er fjöldi sannra jákvæðra mælinga deildur með samanlögðum fjölda sannra jákvæðra og falskra jákvæðra mælinga.

$$\frac{SJ}{SJ+FJ} \tag{4.18}$$

4.33. Neikvætt forspárgildi (negative predictive value)

Neikvætt forspárgildi flokkunaraðferðar er fjöldi sannra neikvæðra mælinga deildur með samanlögðum fjölda sannra neikvæðra og falskra neikvæðra mælinga.

$$\frac{SN}{SN+FN} \tag{4.19}$$

4.7. Samantekt um lýsistærðir

Við ljúkum þessum kafla á stuttu yfirliti yfir þær lýsistærðir sem við höfum séð og í hvaða tilvikum þær skulu notaðar. Byrjum á að skoða þær lýsistærðir sem lýsa einni breytu. Þar sáum við fimm lýsistærðir sem lýsa miðju og átta sem lýsa breytileika. Hvaða lýsistærðir eru viðeigandi hverju sinni fer eftir gerð og dreifingu gagnanna sem við ætlum að lýsa.

Í Töflu 4.3 hér fyrir neðan höfum við tekið saman þessar lýsistærðir og birt í töflu sem sýnir með hvaða gerð af breytum er viðeigandi að nota þær.

		flokkabreyta		talnabreyta	
		óröðuð	röðuð	strjál	samfelld
	Miðja spannar			x	x
	Tíðasta gildi	x	x	x	
Lýsistærð miðju	Miðgildi		x	x	x
	Meðaltal			x	x
	Vegið meðaltal			x	x
	Spönn/dreifisvið		x	x	x
	Fjórðungamörk		x	x	x
	Fimm tölu samantekt		x	x	x
Lýsistærð breytileika	Fjórðungaspönn			x	x
	Prósentumörk		x	x	x
	Dreifni/fervik			x	x
	Staðalfrávik			x	x
	Frávikshlutfall			x	x

Tafla 4.3: Tafla sem sýnir hvaða lýsistærð er viðeigandi að nota fyrir hverja gerð af breytu.

Þegar unnið er með samfelldar talnabreytur er algengast er að nota meðaltal eða miðgildi til að lýsa miðju og staðalfrávik eða fjórðungamörk til að lýsa breytileika. Það fer eftir dreifingu gagnanna hvort par lýsistærða á við og því er góð regla að skoða gögnin myndrænt áður en ákveðið er hvort par af lýsistærðum skuli nota. Tafla 4.7 hér að neðan sýnir hvaða par af lýsistærðum á við hverju sinni.

Einkenni gagnanna	Miðja: meðaltal Breytileiki: staðalfrávik	Miðja: miðgildi Breytileiki: fjórðungamörk
Samhverf dreifing	x	
Skekkt dreifing		x
Útlagi		x

Tafla 4.4: Tafla sem sýnir hvort meðaltal/staðalfrávik eða miðgildi/fjórðungamörk eru meira viðeigandi til að lýsa talnabreytum með tilsvarandi dreifingu.

Við sáum einnig nokkrar lýsistærðir sem lýsa sambandi tveggja breyta. Fylgni notum við til að lýsa sambandi tveggja samfelldra breyta en til að lýsa sambandi tveggja strjálla breyta höfðum við alls sex lýsistærðir: Áhættuhlutfall og gagnlíkindahlutfall lýsa hlutföllum hlutfalla, en næmi, sértæki, jákvætt- og neikvætt forspárgildi lýsa gæðum flokkunaraðferða. Það hvaða lýsistærð er viðeigandi í hvaða tilviki fer ekki eftir dreifingu strjálu breytanna, heldur tilraunahögun rannsóknarinnar.

Dæmi

Dæmi 4.1
Ögmundur er mikill áhugamaður um hæð kvenna í ætt sinni. Hann ákvað að framkvæma litla tilraun þar sem hann spurði fjórar frænkur sínar og móður um hæð þeirra. Niðurstöðurnar voru:

`162, 173, 158, 155, 185.`

a) Reiknið: meðaltal, miðgildi, fjórðungamörk, dreifni, staðalfrávik, spönn, fráviks-hlutfall og fimm tölu samantekt.

b) Síðasta mælingin sem Ögmundur tók var hæð móður sinnar sem mældist 185 cm á hæð. Sé $1.5 \cdot \mathrm{IQR}$ reglan fyrir útlaga notuð, er mæling móður Ögmundar útlagi?

Dæmi 4.2
Finnið fjórðungamörk og teiknið kassarit fyrir eftirfarandi mælisafn.

`230, 222, 265, 289, 302, 201, 354, 289, 254, 322.`

Dæmi 4.3
Á fyrstu önn Sigga sæta í matvælafræði var hann í 4 námskeiðum: Líffræði, tölfræði, efnafræði og sælgætisfræði. Námskeiðin voru mismargar einingar. Í lokaprófunum fékk hann eftirfarandi einkunnir:

Námskeið	Einingar	Lokaeinkunn
Líffræði	6	7.5
Tölfræði	8	9
Efnafræði	8	6
Sælgætisfræði	14	10

Hver er vegin meðaleinkunn Sigga sæta?

Dæmi 4.4
Hvert af eftirfarandi gildir um hægri skekkta dreifingu:

a) Miðgildið er minna en meðaltalið.

b) Miðgildið er stærra en meðaltalið.

c) Staðalfrávik er góður mælikvarði á dreifð.

d) Meðaltal er góður mælikvarði á miðju.

Dæmi 4.5
Hver eru gagnlíkindi þess að fá upp landvætti þegar krónu er kastað?

Dæmi 4.6
Líkurnar á því að Rafn fari út að skokka einhvern handahófsvalinn dag eru 70 %. Hins vegar eru líkurnar á því að Bjarni Kristinn vinur hans fari út að skokka 55 %.

a) Hver eru gagnlíkindi þess að Rafn fari út að skokka einhvern handahófsvalinn dag?

b) Hver eru gagnlíkindi þess að Bjarni Kristinn fari út að skokka einhvern handahófsvalinn dag?

c) Hvert er gagnlíkindahlutfallið að Rafn fari út að skokka einhvern handahófsvalinn dag á móti því að Bjarni Kristinn fari út að skokka?

Dæmi 4.7
Líkurnar á því að reykingamaður greinist með lungnakrabbamein eru 37 %. Líkunar á því að einstaklingur sem ekki reykir greinist með sams konar krabbamein eru hins vegar 7%.

a) Hver eru gagnlíkindi þess að reykingamaður greinist með lungnakrabbamein?

b) Hver eru gagnlíkindi þess að einstaklingur sem ekki reykir greinist með lungnakrabbamein?

c) Hvert er áhættuhlutfall þess að reykingamaður greinist með lungnakrabbamein á móti þeim sem ekki reykir?

d) Hvert er gagnlíkindahlutfall þess að reykingamaður greinist með lungnakrabbamein á móti þeim sem ekki reykir?

Dæmi 4.8
Gæði HIV prófs voru könnuð á 100000 manna úrtaki. Fyrst var HIV prófið framkvæmt á einstaklingunum en að því loknu voru niðurstöður prófanna staðfestar með ítarlegri prófunum. Af þessum 100000 einstaklingum greindi prófið 5450 með HIV. 475 þeirra báru sjúkdóminn í raun. Í úrtakinu voru þar að auki 25 manns sem prófið greindi ranglega ekki með sjúkdóminn.

a) Setjið niðurstöðurnar upp í töflu sem sýnir fjölda falskra og sannra jákvæðra og neikvæðra mælinga.

b) Hvert er næmi og sértæki HIV prófsins?

c) Hvert er jákvætt og neikvætt forspárgildi HIV prófsins?

Dæmi 4.9
Vala Kolbrún kannar áreiðanleika nýs þungunarprófs. Hún fær 50 þungaðar konur til að taka þungunarprófið og af þeim fá 49 jákvæða niðurstöðu. Hún fær einnig 40 konur sem ekki eru þungaðar til að taka prófið og af þeim fá 5 jákvæða niðurstöðu. Hvert er næmi og sértæki þungunarprófsins? Hvert er jákvætt og neikvætt forspárgildi þungunarprófsins?

Dæmi 4.10
Valli vinnur í Bóksölu Stúdenta. Hann er orðinn langþreyttur á því að öryggisleitarhliðið gefur æði oft frá sér viðvörunarhljóð þó svo að ekki hafi verið gerð tilraun til að fara með ógreiddar vörur út úr búðinni. Hvort hefur öryggisleitarhliðið of lágt næmi eða sértæki?

Dæmi 4.11
Birna Margrét kannar samband skuldastöðu fólks og hjátrúargirni þess. Hún hefur samband við 40 manns á vanskilaskrá og af þeim reyndust 25 vera mjög hjátrúarfullir. Hún hafði einnig samband við 50 manns sem ekki eru á vanskilaskrá og af þeim reyndust 23 vera mjög hjátrúarfullir. Hvert er gagnlíkindahlutfall þess að vera á vanskilaskrá hjá mjög hjátrúarfullum á móti þeim sem ekki eru mjög hjátrúarfullir?

Dæmi 4.12

a) Hvenær er næmi hærra en jákvætt forspárgildi?

b) Hvenær er sértæki hærra en neikvætt forspárgildi?

5. kafli

Líkindafræðileg undirstaða

Nú höfum við lokið umfjöllun okkar um lýsandi tölfræði en ályktunartölfræðin bíður enn. Í ályktunartölfræði lítum við svo á að mælingarnar okkar séu slembni háðar, hver svo sem orsökin er. Því geta mismunandi mælingar fengist í hvert sinn sem rannsóknin er endurtekin og um leið vitum við ekki hver gildi mælinganna verða fyrr en eftir að við höfum safnað þeim. Til að lýsa þessu fyrirbæri notum við líkindafræðilegt hugtak sem nefnum *slembistærð* sem er meginumfjöllunarefni þessa kafla.

Við byrjum á almennri umfjöllun um hugtakið slembistærð í kafla 5.1 og kynnumst þar afar mikilvægu hugtaki, *líkindadreifingu slembistærða*. Að því loknu (kafli 5.2) fjöllum við um mikilvæga stærðfræðilega eiginleika slembistærða og hefjum þar á eftir umfjöllun um slembistærðir sem lýsa strjálum breytum (kafli 5.3) og kynnumst *tvíkosta líkindadreifingu* og *Poisson líkindadreifingu*.

Í kafla 5.4 fjöllum við um slembistærðir sem lýsa samfelldum breytum. Að því loknu tekur við umfjöllun um fjórar gerðir samfelldra líkindadreifinga. Við byrjum á að fjalla um *normaldreifinguna* en hún er án efa sú dreifing sem mest er notuð innan tölfræðinnar.Að því loknu munum við fjalla um þrjár aðrar gerðir líkindadreifinga, t-dreifingu, χ^2-dreifingu og F-dreifingu, sem við munum nota þegar kemur að ályktunartölfræði.

5.1. Slembistærðir

Í ályktunartölfræði lítum við svo á að þeim breytum sem við höfum áhuga á að draga ályktanir um megi lýsa með slembistærð.

5.1. Slembistærð (random variable)

Slembistærð lýsir útkomu breytu áður en hún er mæld.

Hugsum okkur að við viljum framkvæma rannsókn þar sem við könnum hversu hátt hlutfall flugfarþega á Keflavíkurflugvelli hefur fartölvu meðferðis í flugið. Við framkvæmum litla tilraun þar sem við veljum nokkra flugfarþega af handahófi og skráum niður breytu sem tekur gildið 1 ef farþeginn hafði fartölvu meðferðis í flugið en 0 ef ekki. Slembistærðin sem lýsir þessari útkomu þessarar breytu myndi annars vegar segja okkur að eingöngu gildin 0 og 1 væru mögulegar útkomur og hins vegar hversu líklegt að útkoman sé 0 og hversu líklegt að hún sé 1 - áður en tilraunin er framkvæmd!

Slembistærðir eru ekki tölur í venjulegum skilningi heldur eins konar slembið fyrirbæri sem mun verða að einhverri tölu. Til að láta það ríma við mælingarnar okkar, þarf útkoman sem við skráum að vera **tölur**. Það þýðir að ef breytan sem við erum að mæla er flokkabreyta þá þurfum við að kóða flokkana yfir í tölur með einhverjum hætti. Séum við að mæla kyn gætum við til dæmis táknað útkomuna „karl“ með 0 og útkomuna „kona“ með „1“ og þar fram eftir götunum. Flest tölfræðiforrit gera það sjálfkrafa fyrir okkur.

Gætið þess að rugla ekki slembistærð saman við gildi sem hún hefur tekið. Áður en við mælum hvort að flugfarþegi er með fartölvu eða ekki getur slembistærðin sem því lýsir vissulega tekið gildið einn, en það er út í hött að kalla töluna 1 slembistærð - það er ekkert slembið við hana. Einn er alltaf einn og getur aldrei mögulega orðið núll. Til að gera greinarmun á slembistærð og þeim gildum sem hún hefur tekið erum við mjög nákvæm með rithátt.

5.2. Ritháttur slembistærða (Syntax for random variables)

Við táknum slembistærð með **stórum** staf, oft X, eða staf úr gríska stafrófinu, t.d β.

Við táknum gildi sem slembistærð **hefur tekið** með **litlum** staf, oft x, eða með því að setja hatt yfir stafinn, t.d $\hat{\beta}$.

Víkjum nú aftur að flugfarþegunum. Við lítum svo á að til sé ein slembistærð sem lýsir því hvort að flugfarþegi af handahófi muni hafa fartölvu meðferðis. Köllum slembistærðina X. Í hvert sinn sem kannað er hvort flugfarþegi sé með fartölvu, fæst ný útkoma sem að slembistærðin X hefur tekið. Þegar við höfum mörg gildi sem sama slembistærðin hefur tekið tölusetjum við gildin með vísum (x_1, x_2, x_3 o.s.frv.). Takið eftir samræminu við tölusetningu margra mælinga á sömu breytunni í kafla 4. Þessi samsvörun er engin tilviljun. Við lítum á endurteknar mælingar á sömu breytunni sem mörg gildi sem sama slembistærðin hefur tekið.

5.1.1. Strjálar og samfelldar slembistærðir

Við flokkum slembistærðir í *strjálar slembistærðir* og *samfelldar slembistærðir* eftir því hvort breyturnar sem þær lýsa séu strjálar eða samfelldar.

5.3. Strjálar slembistærðir (discrete random variables)

Strjálar slembistærðir lýsa strjálum breytum. Þær geta eingöngu tekið endanlega mörg gildi á sérhverju takmörkuðu bili.

Dæmi um strjálar slembistærðir eru til dæmis talan sem upp kemur í teningakasti eða fjöldi auglýsinga sem sýndar verða fyrir kvöldfréttir handahófsvalinn dag.

Í þessu riti er fjallað um tvær gerðir af strjálum slembistærðum. Önnur gerðin getur tekið hvaða heiltölugildi sem er. Hin gerðin getur eingöngu tekið endanlega mörg heiltölugildi sem ná frá 0 upp í einhverja tölu n.

5.4. Samfelldar slembistærðir (continuous random variables)

Samfelldar slembistærðir lýsa samfelldum breytum. Þær geta tekið hvaða gildi sem er á einhverju bili.

Dæmi um samfellda slembistærð er hæð handahófsvalinna kvenna. Hún getur tekið hvaða gildi sem er á bilinu frá 50 cm upp í 250 cm. Annað dæmi er hitastig í Reykjavík handahófsvalinn dag. Það getur tekið hvaða gildi sem er á bilinu frá -30°C upp í 30°C.

5.1.2. Líkindadreifing slembistærða

Við getum reiknað líkurnar á því að útkoma slembistærða hljóti tiltekin gildi eða eitthvert gildi á tilteknu bili. Venjan er að nota ritháttinn hér að neðan til að tákna þessar líkur.

5.5. Ritháttur fyrir líkindi slembistærða

$P(X \leq a)$**:** Táknar líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði **minni eða jöfn** gildinu a.

$P(X \geq a)$**:** Táknar líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði **stærri eða jöfn** gildinu a.

$P(a \leq X \leq b)$**:** Táknar líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði **á milli** a og b, bæði gildin meðtalin.

$P(X = a)$**:** Táknar líkur þess að útkoma slembistærðarinnar X verði **nákvæmlega** gildið a.

Sýnidæmi 5.1: Ritháttur fyrir líkindi slembistærða
Notið rithátt fyrir líkindi slembistærða til að tákna eftirfarandi:

a) líkurnar á því að útkoma slembistærðarinnar X verði minni eða jöfn 3.
b) líkurnar á því að útkoma slembistærðarinnar X verði stærri eða jöfn 3.
c) líkurnar á því að útkoma slembistærðarinnar X verði nákvæmlega 10.
d) líkurnar á því að útkoma slembistærðarinnar X verði stærri eða jöfn -1, en þó ekki stærri en 3.

a) $P(X \leq 3)$
b) $P(X \geq 3)$
c) $P(X = 10)$:
d) $P(-1 \leq X \leq 3)$:

Líkindadreifing slembistærðar gefur okkur líkur þess að útkomur hennar taki tiltekin gildi. Með þeim hætti gefur hún okkur allar þær upplýsingar sem hægt er að hafa um slembistærðina. Hún er skilgreind með ólíkum hætti fyrir samfelldar og strjálar slembistærðir.

5.6. Líkindadreifing slembistærða (probability distribution of random variables)
Líkindadreifing slembistærðar er regla sem segir okkur hvaða gildi slembistærðin getur tekið og ennfremur:

$P(X = a)$ fyrir öll gildi a sem hún getur tekið ef líkindadreifingin er **strjál**.

$P(a \leq X \leq b)$ fyrir öll gildi a og b ef líkindadreifingin er **samfelld**.

Skilgreininguna að ofan má líka orða svo:

Fyrir strjálar slembistærðir finnum við, fyrir hvaða mögulegu útkomu sem er, líkurnar á því að slembistærðin taki það gildi.

Fyrir samfelldar slembistærðir finnum við, fyrir hvaða bil sem er, líkurnar á að útkoma slembistærðarinnar verði á því bili.

5.7. Strjálar og samfelldar líkindadreifingar

Ef slembistærð er **strjál** segjum við að líkindadreifing hennar sé strjál.

Ef slembistærð er **samfelld** segjum við að líkindadreifing hennar sé samfelld.

Þar sem slembni margra þeirra breyta sem við skoðum er svipuð í eðli sínu haga slembistærðirnar sem þær lýsa sér svipað og hafa þar af leiðandi svipaða líkindadreifingu. Við segjum þá að líkindadreifingar slembistærðanna séu af sömu *gerð*. Ein slík gerð er til dæmis normaldreifing sem margir kannast við.

Til eru nokkrar gerðir af bæði strjálum og samfelldum líkindadreifingum sem ná að lýsa stórum flokki breyta. Þeim þurfa allir sem nota og beita tölfræði að kunna skil á. Við munum fjalla um mikilvægustu gerðir bæði strjálla og samfelldra líkindadreifinga. Þá sjáum við jafnframt hvers vegna dreifingarnar eru skilgreindar á mismunandi hátt eftir því hvort þær eru strjálar eða samfelldar.

Hvort sem líkindadreifingar eru strjálar eða samfelldar þá eiga þær það sameiginlegt að þeim má lýsa með tölum sem kallast *stikar* líkindadreifingarinnar.

5.8. Stiki (parameter)

Sérhverri gerð líkindadreifingar er lýst með tölum sem kallast *stikar* líkindadreifingarinnar. Mismunandi stikar lýsa mismunandi líkindadreifingum og yfirleitt eru stikarnir bara einn eða tveir. Ef við vitum af hvaða gerð líkindadreifing slembistærðar er þá gefa gildin á stikum hennar allar þær upplýsingar sem hægt er að fá um slembistærðina.

Til að geta talað stuttort og skýrt um þær slembistærðir sem fylgja algengustu líkindadreifingunum sem og stikunum sem lýsa þeim, hafa nokkrir bókstafir verið teknir frá fyrir þessar dreifingar, sem og stikana þeirra. Þannig er til dæmis bókstafurinn N notaður til að lýsa gerðinni normaldreifingu og grísku stafirnir μ og σ^2 lýsa stikunum tveimur sem henni er lýst með. Þannig segir fullyrðingin $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ að slembistærðin X fylgi normaldreifingu þar sem gildi stikanna eru μ og σ^2. Þessi ritháttur verður sýndur samhliða líkindadreifingunum sem kynntar eru.

Takið eftir að ef við vitum af hvaða gerð líkindadreifing slembistærðar er þá gefa gildin á stikum hennar allar þær upplýsingar sem hægt er að fá um slembistærðina. Því kemur það ekki á óvart að stikar munu spila stórt hlutverk þegar við förum í ályktunartölfræði í kafla 6.

Tökum nú saman það sem við förum yfir í þessum hluta. Hægt er að reikna líkur þess að slembistærðir taki tiltekin gildi. Þeim líkum er lýst með líkindadreifingu slembistærðanna sem gefa okkur allar mögulegar upplýsingar um þær. Margar slembistærðir hafa líkindadreifingar af ákveðnum þekktum gerðum. Hverri gerð líkindadreifingar er lýst með tölum sem kallast stikar og til hverrar gerðar af líkindadreifingum tilheyra mismunandi stikar. Ef við vitum af hvaða gerð líkindadreifing er þá gefa gildi stika hennar allar þær upplýsingar sem hægt er að fá um líkinadreifinguna.

5.2. Stærðfræðilegir eiginleikar slembistærða

5.2.1. Óháðar og einsdreifðar slembistærðir

Nú munum við fjalla um hugtök sem lýsa sambandi tveggja eða fleiri slembistærða en ekki hverri einstakri slembistærð. Þessi hugtök eru *hæði*, *óhæði* og *einsdreifni*.

5.9. Óháðar slembistærðir (independent random variables)

Við segjum að tvær slembistærðir séu *óháðar* ef útkoma annarrar slembistærðarinnar hefur engin áhrif á hver útkoma hinnar slembistærðarinnar verður.

Ímyndum okkur að við ætlum að kasta teningi og krónu. Látum slembistærðina X vera útkomuna úr teningakastinu en slembistærðina Y vera útkomuna úr krónukastinu. Við trúum því að það séu allar útkomur jafnlíklegar í hvert sinn sem teningi er kastað og þá skiptir engu máli hvaða útkoma kom úr krónukastinu. Það getum við orðað sem svo að við trúum því að útkoman í teningakastinu sé óháð útkomunni í krónukastinu, það er að slembistærðirnar X og Y séu óháðar.

5.10. Háðar slembistærðir (dependent random variables)

Við segjum að tvær slembistærðir séu *háðar* ef þær eru ekki óháðar, það er ef útkoma annarrar breytunnar veldur því að einhverjar útkomur hinnar breytunnar verði líklegri eða ólíklegri en ella.

Fjöldinn allur af slembistærðum eru háðar. Hugsum okkur nú að slembistærðin X sé hæð skólabarns sem valið er af handahófi úr fyrsta bekk í Melaskóla og að slembistærðin Y sé þyngd sama barns. Ef útkoma X er há tala (hávaxið barn), þá er útkoma Y líklegri til að vera sömuleiðis há tala (þyngra barn) - og öfugt. Því eru slembistærðirnar X og Y háðar.

Ef óháðar slembistærðir hafa allar sömu líkindadreifingu þá segjum við að þær séu *óháðar og einsdreifðar*.

5.11. Óháðar og einsdreifðar slembistærðir (iid random variables)

Við segjum að slembistærðir $X_1, \ldots, X_n$ séu *óháðar* (indipendent) ef hver þeirra er óháð öllum hinum og *einsdreifðar* (identically distributed) ef þær hafa allar sömu líkindadreifingu.

Þegar slembistærðir eru óháðar og einsdreifðar gerum við engan greinarmun á því að sjá tíu útkomur tíu ólíkra slembistærða, þ.e.a.s. eina útkomu fyrir hverja slembistærð, eða að sjá tíu mismunandi útkomur sem að sama slembistærðin tók. Þá notum við stundum orðalagið að hafa *óháðar mælingar* á sömu slembistærðinni. Skoðum nú aftur flugfarþegana okkar. Ef að flugfarþegarnir eru valdir af algjöru handahófi eru líkurnar á því að einn flugfarþegi hafi fartölvu meðferðis óháðar líkunum á því að einhver annar hafi fartölvu meðferðis. Því getum við litið svo á að við höfum tíu óháðar mælingar á sömu slembistærðinni.

Úrvinnsla okkar í tölfræði byggist æði oft á því að mælingarnar okkar séu útkomur óháðra og einsdreifðra slembistærða. Það er, við teljum að við höfum í höndunum útkomur endurtekinna mælinga á sömu breytunni og ennfremur trúum við að útkoma einnar mælingar hafi ekki áhrif á útkomu hinna mælinganna og þar af leiðandi séu mælingarnar óháðar. Óhæði og einsdreifni mælinga verður eingöngu tryggð með góðri úrtakshögun sem farið var í í kafla 2.4.

5.2.2. Lögmál mikils fjölda

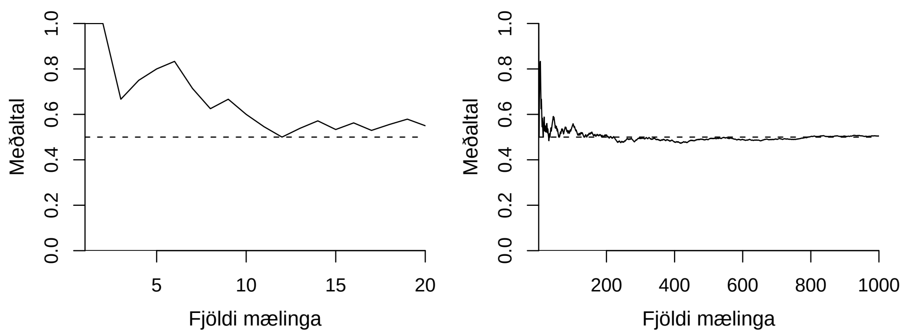
Það er óhætt að fullyrða að *meðaltal* sé algengasta lýsistærðin sem við vinnum með. Bæði er einfalt að reikna og skilja útkomu meðaltals og ekki er verra að meðaltal hefur afskaplega góða stærðfræðilega eiginleika. Sá fyrsti sem við munum kynnast er *lögmál mikils földa*. . Látum X vera slembistærðina sem tekur gildið 0 ef upp kemur þorskur þegar krónu er kastað, en 1 ef landvættirnir koma upp. Krónunni var kastað 20 sinnum og upp komu þessar útkomur:

$$1, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0$$

Skoðum nú hvernig meðaltal mælinganna breytist eftir því sem mælingunum fjölgar. Meðaltal fyrstu mælingar er einungis einn. Meðaltal fyrstu tveggja er (1+1)/2, sem er líka einn. Meðaltal fyrstu þriggja er (1+1+0)/3 sem er tveir þriðju. Alls fáum við eftirfarandi niðurstöður:

Fjöldi:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Meðaltal:	1.00	1.00	0.67	0.75	0.80	0.83	0.71	0.62	0.67	0.60
Fjöldi:	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Meðaltal:	0.55	0.50	0.54	0.57	0.53	0.56	0.53	0.56	0.58	0.55

Vinstra megin á mynd 5.1 má sjá myndrænt hvernig meðaltalið á dæminu hér að ofan breytist. Hægra megin á sömu mynd má sjá svipaða tilraun þeirri hér að ofan en nú



Mynd 5.1: Lögmál mikils fjölda

var krónunni kastað 1000 sinnum. Á myndinni má sjá hvernig meðaltal útkomanna okkar færðist nær og nær einu ákveðnu gildi eftir því sem fleiri og fleiri útkomur voru notaðar til að reikna meðaltalið. Þetta ákveðna gildi má líta á sem raunverulegt meðaltal slembistærðarinnar. Í tölfræði köllum við þetta gildi *væntigildi* slembistærðarinnar, og þegar við á, *meðaltal þýðisins*.

5.12. Væntigildi slembistærða (Expected value)

Væntigildi slembistærðar er *raunverulegt* meðaltal slembistærðarinnar. Það er ýmist táknað með μ eða $E[X]$. Það er einnig kallað *meðaltal þýðis* (population mean) þegar við á.

Hugsum okkur nú að við viljum meta meðalhæð Íslendinga með slembiúrtaki tekið úr þýðinu Íslendingar. Það er handahófskennt hvaða einstaklingar veljast í úrtakið hverju sinni. Ef við tökum fleiri en eitt úrtak mun meðaltal mælinganna breytast í hvert sinn sem nýtt úrtak er valið. Hins vegar fyrirfinnst eitthvert eitt raunverulegt gildi, sem við fyndum ef við mældum hæð allra Íslendinga og reiknuðum meðaltalið. Það er meðaltal þýðisins og væntigildi slembistærðarinnar „meðalhæð Íslendinga“. Það er sjaldnast svo að við þekkjum meðaltal þýðisins.

Skoðum einnig krónukastið hér að ofan. Við vitum aldrei hvort upp kemur þorskur eða landvættir en þó munu þau koma upp álíka oft ef krónunni er kastað nægjanlega oft. Hér á ekki við að tala um meðaltal þýðis, heldur er nær að tala um hið raunverulega meðaltal krónukastanna. Þar sem það er jafnlíklegt að upp komi þorskur eða landvættir, er jafnlíklegt að slembistærðin taki gildið 0 eða 1, svo raunverulegt meðaltal slembistærðarinnar „krónukast“ er 1/2.

Við sáum jafnframt í krónukastinu hvernig meðaltal mælinganna færðist nær og nær 1/2 eftir því sem fjöldi mælinga jókst. Þetta er *lögmál mikils fjölda*.

5.13. Lögmál mikils fjölda (law of large numbers)

Eftir því sem fjöldi mælinga á slembistærð X eykst þá stefnir meðaltal mælinganna, táknað $\bar{x}$, nær *væntigildi* slembistærðarinnar, táknað μ eða $E[X]$.

Lögmál mikils fjölda segir okkur að eftir því sem við höfum stærra úrtak því nær meðaltali þýðisins verður meðaltal útkomanna okkar. Það segir okkur líka að eftir því sem við höfum fleiri mælingar á breytu, því nær raunverulegu meðaltali breytunnar verður meðaltal mælinganna.

Stundum viljum við fjalla samtímis um væntigildi tveggja slembistærða, til dæmis X og Y. Þá er vonlaust að nota sama táknið, μ, fyrir væntigildi þeirra beggja. Það vandamál má leysa á tvo vegu. Annars vegar með því að láta μ_X tákna væntigildi slembistærðarinnar X og μ_Y væntigildi slembistærðarinnar Y en hins vegar með því að láta $E[X]$ tákna væntigildi slembistærðarinnar X og samsvarandi $E[Y]$ fyrir Y.

5.14. Dreifni slembistærða, $Var[X]$
Á sama hátt og slembistærðir hafa raunverulegt meðaltal, hafa þær einnig *raunverulega dreifni*. Hana táknum við ýmist með σ^2, eða $Var[X]$. Hún er einnig kölluð *dreifni þýðis* (population variance) þegar við á.

5.2.3. Línuleg umbreyting á samfelldum slembistærðum

Oft eru mælingar á samfelldum breytum ekki á þeim kvarða sem við hefðum viljað. Oftar en ekki dugar **línuleg umbreyting** til að koma gögnunum á kvarða sem við skiljum.

5.15. Línuleg umbreyting (Linear transformation)

Línuleg umbreyting slembistærðarinnar X með samlagningarstuðulinn a og margföldunarstuðulinn b er slembistærðin $a+bX$.

Við margföldum sem sagt sérhvert gildi með tölunni b og leggjum sérhverja útkomu við töluna a.

5.16. Að breyta til baka
Ef slembistærðin Y er fengin með línulegu umbreytingunni $Y = a + bX$, þá er slembistærðin X fengin með formúlunni:

$$X = \frac{Y - a}{b}$$

5.17. Væntigildi og dreifni eftir línulega umbreytingu
Ef X er slembistærð og a og b eru gefnar tölur, þá eru væntigildi og dreifni línulegu umbreytingarinnar $a + bX$ stærðirnar:

$$E[a + bX] = a + b \cdot E[X]$$

og

$$Var[a + bX] = b^2 Var[X]$$

5.3. Strjálar líkindadreifingar

Núna skulum við skoða nánar strjálar líkindadreifingar, þ.e.a.s. líkindadreifingar sem að lýsa strjálum breytum. Strjálum líkindadreifingum er best lýst með *massafalli*.

5.3.1. Massafall

5.18. Massafall (mass function)

Með *massafalli* (mass function) reiknum við líkur stakra útkoma strjálla slembistærða. Við táknum massafallið með $f(x)$ og það má skrifa sem

$$f(x) = P(X = x). \tag{5.1}$$

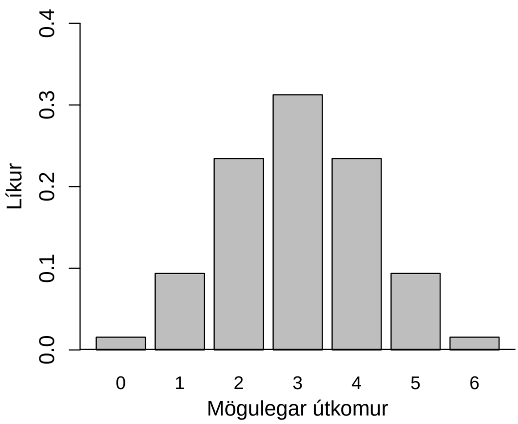
Um massafallið gildir að

$$f(x) \geq 0 \tag{5.2}$$
$$\sum_{\text{yfir öll x}} f(x) = 1. \tag{5.3}$$

Við notum stöplarit, sjá kafla 3.1, til að lýsa massafalli myndrænt.

Jöfnu (5.1) má lesa sem „massafallið gefur líkurnar á að slembistærðin X taki gildið x“, þar sem x getur verið hvaða tala sem er. Jafna (5.2) segir okkur að massafallið er alltaf stærra eða jafnt og núll og jafna (5.3) segir okkur að ef við leggjum saman gildin sem massafall X tekur fyrir öll gildi á x verði útkoman einn.

Dæmigert stöplarit sem lýsir massafalli má sjá á mynd 5.2. Á x-ásnum má sjá mögulegar útkomur slembistærðarinnar og á y-ásnum má sjá líkurnar á þessum útkomum.



Mynd 5.2: Stöplarit massafalls

Takið eftir samsvörunni milli strjálla slembistærða og strjálla breyta. Við notum stöplarit til að lýsa strjálum slembistærðum myndrænt á sama hátt og við notum stöplarit til að lýsa strjálum breytum myndrænt, hvort sem þær eru talna- eða flokkabreytur.

5.3.2. Reiknireglur fyrir strjálar slembistærðir

Áður en við ræðum um strjálar líkindadreifingar og reiknum út líkur á að slembistærð taki ákveðið gildi, skulum við skoða nokkrar reglur sem munu koma að góðum notum síðar í kaflanum. Þessar reglur sýna okkur hvernig umrita má líkur svo auðveldara verði fyrir okkur að reikna þær.

5.19. Reiknireglur fyrir strjálar slembistærðir
Þegar reikna á líkur fyrir strjála slembistærð X má oft auðvelda útreikninga með

því að snúa líkunum við

$$
\begin{aligned}
P(X \leq k) &= 1 - P(X > k) \quad (5.4)\\
P(X < k) &= 1 - P(X \geq k) \quad (5.5)\\
P(X \geq k) &= 1 - P(X < k) \quad (5.6)\\
P(X > k) &= 1 - P(X \leq k) \quad (5.7)
\end{aligned}
$$

þar sem k getur verið hvaða mögulega útkoma sem X getur tekið.

Nota skal jöfnu (5.4) ef reikna á líkurnar að gildi slembistærðarinnar X verði **minna eða jafnt** tölunni k.

Nota skal jöfnu (5.5) ef reikna á líkurnar að gildi slembistærðarinnar X verði **minna en** talan k.

Nota skal jöfnu (5.6) ef reikna á líkurnar að gildi slembistærðarinnar X verði **stærra eða jafnt** tölunni k.

Nota skal jöfnu (5.7) ef reikna á líkurnar að gildi slembistærðarinnar X verði **stærra en** talan k.

5.3.3. Tvíkostadreifingin

Mörg tölfræðileg viðfangsefni fjalla um sams konar tilraunir sem eru endurteknar mörgum sinnum. Ef hver og ein þessara tilrauna uppfyllir skilyrðin í kassa 5.20, flokkast þær hver og ein sem *Bernoulli tilraun* og þá má reikna líkur alls kyns mögulegra uppákoma á þægilegan hátt.

5.20. Bernoulli tilraun (Bernoulli trial)

Sérhver tilraun í safni endurtekinna tilrauna flokkast sem *Bernoulli tilraun* ef eftirfarandi gildir:

1. Hver tilraun hefur aðeins tvær mögulegar útkomur. Það er venja að kalla þessar útkomur *jákvæða útkomu* (success) og *neikvæða útkomu* (failure).
2. Líkurnar á jákvæðri útkomu eru þær sömu í hverri tilraun fyrir sig.
3. Útkoma í einni tilraun hefur ekki áhrif á útkomu í annarri tilraun, þ.e.a.s mælingarnar eru óháðar (independent).

Skilyrði 2 er jafngilt því að líkurnar á neikvæðri útkomu séu þær sömu í hverri tilraun fyrir sig, þar sem líkurnar á neikvæðri útkomu eru ávallt 1 mínus líkurnar á jákvæðri útkomu.

Oft höfum við eingöngu áhuga á því að reikna hversu oft við sjáum jákvæða útkomu meðal safns Bernoulli tilrauna. Við gætum til dæmis viljað reikna líkurnar á því að fá tvær sexur (sem væru þá jákvæða útkoman) þegar teningi er kastað fimm sinnum. Þá er þægilegt að líta á heildarfjölda jákvæðra útkoma sem eina slembistærð, X. Hún hefur þekkta líkindadreifingu, sem kallast *tvíkostadreifingin* og er henni lýst með stikunum n, sem er fjöldi Bernoulli tilrauna sem framkvæmdar eru, og p sem er líkurnar á því að hver og ein Bernoulli tilraun heppnist.

5.21. Tvíkostadreifingin (binomial distribution)

Látum X fylgja tvíkostadreifingu með stikana n og p, táknað $X \sim B(n,p)$. Ef k er eitthvert gildanna $\{0,1,2,...\text{n}\}$ má reikna líkurnar á að slembistærðin X taki gildið k með massafalli tvíkostadreifingarinnar :

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...n \tag{5.8}$$

þar sem $\binom{n}{k}$ er tvíliðustuðullinn. Sjá kassa 5.22.

Slembistærðin X táknar fjölda jákvæðra tilrauna úr n Bernoulli tilraunum þar sem p eru líkurnar á jákvæðri útkomu í hverri tilraun fyrir sig. Mögulegur fjöldi jákvæðra útkoma spannar frá 0 til n svo X getur mögulega tekið gildin $\{0,1,2,...\text{n}\}$.

5.22. Tvíliðustuðullinn (binomial coefficient)

Tvíliðustuðullinn (binomial coefficient) er táknaður með $\binom{n}{k}$. Hann er jafn fjölda möguleika á að fá k jákvæðar útkomur í n tilraunum og er reiknaður með

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \tag{5.9}$$

þar sem $k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot ... \cdot (1)$. Sér í lagi er $0! = 1$.

Sýnidæmi 5.2: Tvíliðustuðullinn
Á hve marga vegu má fá nákvæmlega tvo þorska þegar krónu er kastað fjórum sinnum?

Táknum útkomuna landvætti með L og útkomuna þorsk með Þ og skrifum útkomurnar í sömu röð og þær koma fyrir í krónukastinu. Mögulegar leiðir til að fá tvær jákvæðar útkomur eru þá

`LLÞÞ ÞÞLL ÞLLÞ LÞÞL LÞLÞ ÞLÞL`

Þetta eru sex mögulegar leiðir. Munið að tvíliðustuðullinn gefur okkur á hversu marga vegu við getum fengið k jákvæðar útkomur í n tilraunum. Í þessu tilviki er $k = 2$ og $n = 4$ svo við hefðum einnig getað reiknað beint $\binom{4}{2} = 6$.

Sýnidæmi 5.3: Tvíkostadreifingin
Hvaða líkindadreifingu fylgir slembistærðin X, sem lýsir því hversu oft sexa kemur upp þegar teningi er kastað fimm sinnum?

Þar sem teningnum er kastað fimm sinnum er $n = 5$. Líkurnar á því að upp komi sexa í hvert og eitt skipti eru $1/6$ og því er $p = 1/6$. Þá getum við sagt að X fylgi tvíkostadreifingu með stuðlana $p = 1/6$ og $n = 5$ eða $X \sim B(5, 1/6)$.

Sýnidæmi 5.4: Tvíkostadreifingin
Benni hefur gaman af því að kasta krónum. Hverjar eru líkurnar á því að Benni fái nákvæmlega tvo þorska þegar hann kastar krónu fjórum sinnum?

Látum X tákna fjölda þorska sem upp koma (við skilgreinum þorsk sem jákvæða útkomu). Áður en við reiknum líkurnar þurfum við að finna hvaða líkindadreifingu X fylgir.

Að kasta upp krónu er Bernoulli tilraun þar sem það eru aðeins tvær mögulegar útkomur þorskur, jákvæð og landvættir, neikvæð. Líkurnar á jákvæðri útkomu eru þær sömu í hverri tilraun fyrir sig (líkurnar eru alltaf 0.5) og útkomurnar eru óháðar.

Þar sem við framkvæmum Bernoulli tilraunir 4 sinnum fylgir X tvíkostadreifingu með $n = 4$, $p = 0.5$ og við getum skrifað $X \sim B(4, 0.5)$. Við getum því notað jöfnu (5.8) til að reikna líkurnar. Byrjum á að reikna út gildið á tvíliðustuðlinum með jöfnu (5.22)

$$\binom{n}{k} = \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot (2\cdot 1)} = 6$$

og reiknum svo líkurnar með jöfnu (5.8)

$$P(X=2) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{4}{2} 0.5^2 (1-0.5)^{4-2} = 6\cdot 0.5^2\cdot 0.5^2 = 0.3750.$$

Líkurnar á að fá 2 þorska þegar krónu er kastað 4 sinnum eru því 37.5 %.

Sýnidæmi 5.5: Tvíkostadreifingin

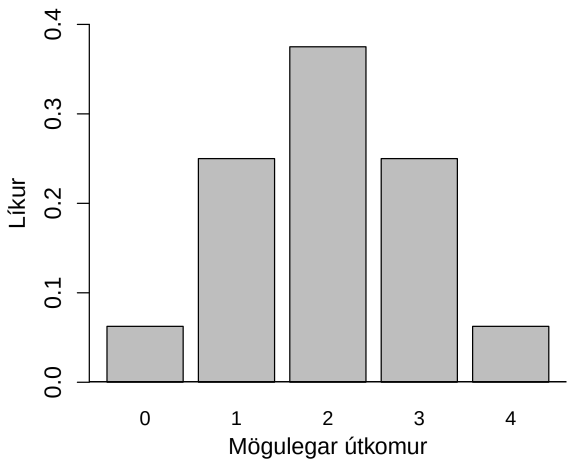
Teiknið upp massafall slembistærðarinnar X sem táknar fjölda jákvæðra útkoma þegar krónu er kastað fjórum sinnum.

Við sáum í dæmi 5.4 að X fylgir tvíkostadreifingu með stikana $p = 0.5$ og $n = 4$.

Til þess að teikna massafallið þurfum við að reikna líkurnar fyrir allar mögulegar útkomur X, það er að segja við þurfum að finna auk $P(X = 2)$ sem við fundum í dæmi 5.4, $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 3)$ og $P(X = 4)$. Þetta gerum við á sama máta og í dæmi 5.4 og við fáum að

$$P(X=0) = 0.0625,\ P(X=1) = 0.25,\ P(X=3) = 0.25,\ P(X=4) = 0.0625.$$

Massafallið má sjá hér að neðan.



Sýnidæmi 5.6: Tvíkostadreifingin
Ólöf kastar teningi þrisvar sinnum. Hverjar eru líkurnar á að hún fái einu sinni sexu í þessum þremur köstum?

Köllum nú X fjölda skipta þegar upp kemur sexa. Áður en við reiknum líkurnar þurfum við að finna hvaða líkindadreifingu X fylgir.

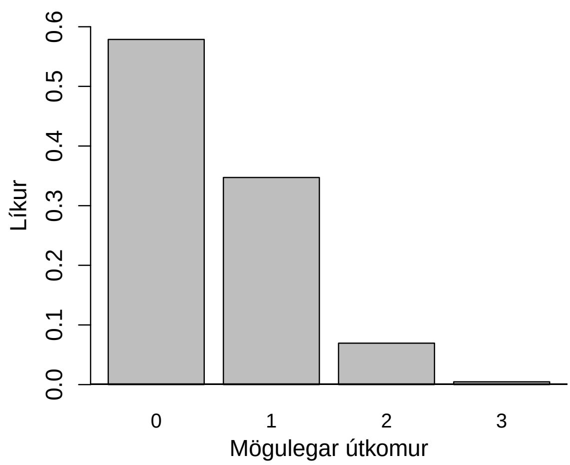
Hér er um Bernoulli tilraun að ræða þar sem við lítum svo á að það séu aðeins tvær mögulegar útkomur (fá sexu, jákvæð, og fá ekki sexu, neikvæð) líkurnar á jákvæðri útkomu eru þær sömu í hverri tilraun fyrir sig (líkurnar eru alltaf 1/6) og útkomurnar eru óháðar.

Þar sem við framkvæmum Bernoulli tilraunir 3 sinnum fylgir X tvíkostadreifingu með $n = 3$, $p = 1/6$ og við getum skrifað $X \in B(3, 1/6)$. Við getum því notað jöfnu (5.8) til að reikna líkurnar og fáum

$$P(X = 1) = \binom{3}{1}(1/6)^1(1-1/6)^{3-1} = 3 \cdot (1/6)^1 \cdot (5/6)^2 = 0.3472.$$

Líkurnar eru því um 34.7%.

Teiknum að lokum massafall X, $X \in B(3, 1/6)$.



Sýnidæmi 5.7: Tvíkostadreifingin
Jói er mikið fyrir radísur og ákveður því að prófa að gróðursetja nokkur radísufræ. Jói hefur aldrei komið nálægt garðrækt og ákveður því að fara rólega í

sakirnar í byrjun og gróðursetur 8 radísufræ. Hann hringir svo stoltur í móður sína sem er radísusérfræðingur mikill. Af áralangri reynslu veit hún að líkurnar á að radísufræ verði að fullvaxta radísu eru 75% miðað við aðstæðurnar í garðinum hans Jóa. Hverjar eru líkurnar á að öll fræin hans Jóa verði að fullvaxta radísum og hvaða forsendur þurfa að gilda svo útreikningarnir séu réttir?

Reikna má líkurnar með að því að nota tvíkostadreifinguna en þá verður að gilda að atburðirnir séu óháðir. Gerum ráð fyrir at atburðirnir séu óháðir og notum jöfnu (5.8) til að reikna líkurnar. Notum X til að tákna fjölda radísufræja sem verða að radísu, $X \in B(8, 0.75)$.

$$P(X=8) = \binom{8}{8}(0.75)^8(1-0.75)^{8-8} = 0.10.$$

Líkurnar eru því 10% en útreikningarnir gilda aðeins ef atburðirnir eru óháðir.

Sýnidæmi 5.8: Tvíkostadreifingin
Stjórnendur framleiðslufyrirtækis hér í bæ huga mikið að gæðamálum og halda þeir fram að líkurnar á að vara sem framleidd er í fyrirtækinu sé gölluð séu 0.1%. Séu 100 vörur frá fyrirtækinu valdar af handahófi, hverjar eru líkurnar á að engin þeirra sé gölluð? Gerið ráð fyrir að atburðirnir séu óháðir.

Látum X tákna fjölda gallaðra vara, $X \in B(100, 0.001)$. Við notum jöfnu (5.8) til að reikna líkurnar á að engin vara sé gölluð:

$$P(X=0) = \binom{100}{0}(0.001)^0(1-0.001)^{100-0} = 0.999^{100} = 0.90.$$

Líkurnar eru því 90%.

Við höfum nú séð að reikna má líkurnar á að slembistærðin X taki eitthvert ákveðið gildi k með jöfnu (5.8). Auk þess að reikna $P(X=k)$ höfum við oft áhuga á að reikna $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X < b)$, $P(X \leq k))$, $(X < k)$, $P(X \geq k))$ eða $(X > k)$. Við getum reiknað allar þessar líkur með jöfnu (5.8) ásamt því að nota reglurnar í kassa 5.19. Skoðum nú nokkur dæmi sem sýna hvernig þetta er gert.

Sýnidæmi 5.9: Tvíkostadreifingin
Sigga kastar krónu 10 sinnum. Táknum fjölda þorska með X, $X \sim B(10, 0.5)$.

a) Hverjar eru líkurnar á því að Sigga fái á milli 4 og 6 þorska?
b) Hverjar eru líkurnar á því að Sigga fái 3 eða færri þorska?
c) Hverjar eru líkurnar á því að Sigga fái 8 eða fleiri þorska?
d) Hverjar eru líkurnar á því að Sigga fái fleiri en 2 þorska?
e) Teiknið massafall X.

a) Finnum nú líkurnar á því að fjöldi þorska verði á milli 4 og 6: $P(4 \leq X \leq 6)$

Til að reikna þessar líkur verðum við að leggja saman líkurnar á því að fá 4, 5 og 6 þorska eða

$$P(4 \leq X \leq 6) = P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6).$$

Við notum jöfnu (5.8) og fáum

$$P(4 \leq X \leq 6) = 0.2051 + 0.2461 + 0.2051 = 0.6563.$$

Líkurnar á því að fá milli 4 og 6 þorska þegar krónu er kastað 10 sinnum eru því um 65.6%.

b) Finnum nú líkurnar á því að fjöldi þorska verði 3 eða færri: $P(X \leq 3)$

Til að reikna þessar líkur verðum við að leggja saman líkurnar að fá 0, 1, 2 og 3 þorska eða

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$$

Við notum jöfnu (5.8) og fáum

$$P(X \leq 3) = 0.0010 + 0.0098 + 0.0439 + 0.1172 = 0.1719.$$

Líkurnar eru því um 17.2 %.

VARÚÐ: Ef beðið hefði verið um líkurnar á að fá færri en 3 þorska væru líkurnar:

$$P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0.0527.$$

c) Finnum nú líkur þess að fjöldi þorska verði 8 eða fleiri: $P(X \geq 8)$.

Til að reikna þessar líkur verðum við að leggja saman líkurnar á því að fá 8, 9, eða 10 þorska (við köstum krónunni 10 sinnum og því getur fjöldi þorska ekki verið fleiri en 10) eða

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$$

Við notum jöfnu (5.8) og fáum

$$P(X \geq 8) = 0.0439 + 0.0098 + 0.0010 = 0.0547$$

Líkurnar eru því um 5.5 %.

VARÚÐ: Ef beðið hefði verið um líkurnar á að fá fleiri en 8 þorska væru líkurnar

$$P(X > 8) = P(X = 9) + P(X = 10) = 0.0108$$

d) Finnum nú líkur á því að fjöldi þorska verði fleiri en 2: $P(X > 2)$.

Við getum reiknað þessar líkur sem

$$P(X > 2) = P(X = 3) + P(X = 4) + ... + P(X = 10)$$

en auðveldara er að nota jöfnu (5.7) til að umskrifa líkurnar

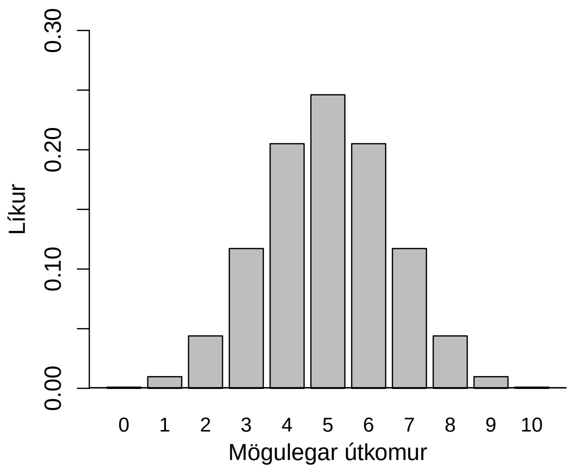
$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(X = 2) + P(X = 1) + P(X = 0)).$$

Við notum jöfnu (5.8) og fáum

$$P(X > 2) = 1 - (0.0439 + 0.0098 + 0.0010) = 0.9453.$$

Líkurnar á að fá fleiri en tvo þorska eru því um 94.5%.

d) Teiknum nú massafall slembibreytunnar X, $X \in B(10, 0.5)$.



Væntigildi og dreifni tvíkostadreifingarinnar

5.23. Væntigildi og dreifni tvíkostadreifingar
Ef X fylgir tvíkostadreifingu, $X \sim B(n,p)$ þá gildir

$$\mathrm{E}[X] = np \tag{5.10}$$
$$\mathrm{Var}[X] = np(1-p) \tag{5.11}$$

Sýnidæmi 5.10: Væntigildi og dreifni tvíkostadreifingarinnar
Árni Pétur ætlar að kasta teningi 900 sinnum. Látum X tákna fjölda skipta sem fjarki kemur upp, $X \sim B(900, 1/6)$. Finnið $\mathrm{E}[X]$ og $\mathrm{Var}[X]$.

Við notum jöfnur (5.10) og (5.11) og fáum

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= np = 900 \cdot 1/6 = 150 \\ \mathrm{Var}[X] &= np(1-p) = 125. \end{aligned}$$

5.3.4. Poisson dreifingin

Poisson dreifingin er oft notuð til að lýsa fjölda slembinna atvika sem eiga sér stað **á ákveðinni einingu** en mögulegar útkomur hafa engin efri mörk. Einingarnar geta sem dæmi verið tímabil, svæði eða einhver hlutur. Sem dæmi má nefna fjölda símtala til nemendaskrár **á** mínútu, fjölda hreindýra **á** ferkílómetra og fjölda innsláttarvillna **á** blaðsíðu.

Poisson dreifingin hefur bara einn stika sem er táknaður með λ. Hann lýsir því hvað við væntum að margar jákvæðar útkomur eigi sér stað að meðaltali á tiltekinni mælieiningu. Við setjum engar skorður á hvaða heiltölugildi slembistærð X, sem fylgir Poisson dreifingu, getur tekið. Sama hvað við skoðum hátt gildi eru ætíð einhverjar líkur á því að X taki það gildi (þó þær geti verið agnarsmáar).

5.24. Poisson dreifingin (Poisson distribution)
Látum X fylgja Poisson dreifingu með stikann λ, táknað $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Ef k er eitthvert jákvætt heiltölugildi (núll meðtalið) má reikna líkurnar á að slembistærðin X taki gildið k með massafalli Poisson dreifingarinnar :

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}. \tag{5.12}$$

Slembistærðin X lýsir fjölda jákvæðra útkoma á tiltekna mælieiningu, þar sem λ er meðafjöldi jákvæðra útkoma á hverja einingu. Það eru engin efri mörk á fjölda jákvæðra útkoma svo X getur mögulega tekið hvaða gildi $\{0, 1, 2, ...\}$ sem er.

Bókstafurinn e í jöfnu 5.12, stendur fyrir ákveðna tölu, sem er kölluð e. Gildi hennar er um það bil 2.72. Töluna e má, líkt og töluna π, finna á flestum vasareiknum. Hún er þá yfirleitt táknuð með e^x.

Sýnidæmi 5.11: Poisson dreifingin
Anna Vigdís er á hraðferð og veltir því fyrir sér hversu löng biðröðin verði á hraðkassanum í Krónunni úti á Granda. Meðalfjöldi kúnna sem koma að hraðkassanum er 1.5 á mínútu. Hvaða líkindadreifingu má nota til að lýsa fjölda kúnna sem koma að hraðkassanum á hverri mínútu?

Það eru engin efri mörk á því hve margir kúnnar geta staðið við kassann hverju sinni og við vitum meðalfjöldann sem kemur að kassanum á hverri mínútu. Því notum við Poisson dreifinguna til að lýsa fjölda kúnna sem koma að kassanum á hverri mínútu með stikann $\lambda = 1.5$ eða $X \sim \text{Pois}(1.5)$

Jafna (5.12) sýnir okkur hvernig reikna má líkurnar á að slembistærð X sem fylgir Poisson dreifingunni taki eitthvert ákveðið gildi k. Eins og með tvíkostadreifinguna höfum við oft áhuga á að reikna aðrar líkur eða $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X < b)$, $P(X \leq k)$, $P(X < k)$, $P(X \geq k)$ eða $P(X > k)$. Við getum reiknað allar þessar líkur með jöfnu (5.12) ásamt því að nota reglurnar í kassa 5.19.

Sýnidæmi 5.12: Poisson dreifingin
Nú fjöllum við aftur um Önnu Vigdísi og fjölda kúnna sem koma að hraðkassanum í Krónunni á hverri mínútu. Meðalfjöldi kúnna sem koma að kassanum er 1.5 á mínútu.

Finnið líkurnar á að
a) 3 kúnnar komi að kassanum á einni mínútu.
b) í mesta lagi 2 kúnnar komi að kassanum á einni mínútu.
c) í minnsta lagi 1 kúnni komi að kassanum á einni mínútu.

a) Finnum líkurnar á að 3 kúnnar komi að kassanum á einni mínútu.

Við vitum að meðalfjöldi kúnna á mínútu er 1.5. Því er $\lambda = 1.5$. Við notum jöfnu (5.12) og fáum

$$P(X = 3) = \frac{e^{-1.5} 1.5^3}{3!} = 0.1255.$$

Líkurnar eru því um 12.5%.

b) Finnum líkurnar á að í mesta lagi 2 kúnnar komi að kassanum á einni mínútu.

Til að reikna líkurnar á að í mesta lagi 2 kúnnar komi að kassanum þurfum við að leggja saman líkurnar á að það komi enginn, ein eða tvær manneskjur að kassanum á einni mínútu. Við notum jöfnu (5.12)

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X=0)+P(X=1)+P(X=2) \\ &= 0.2231+0.3347+0.2510 \\ &= 0.8088. \end{aligned}$$

Líkurnar eru því um 80.9 %.

c) Finnum líkurnar á að í minnsta lagi 1 kúnni komi að kassanum á einni mínútu.

Líkurnar á að í minnsta lagi einn kúnni komi að kassanum má skrifa sem

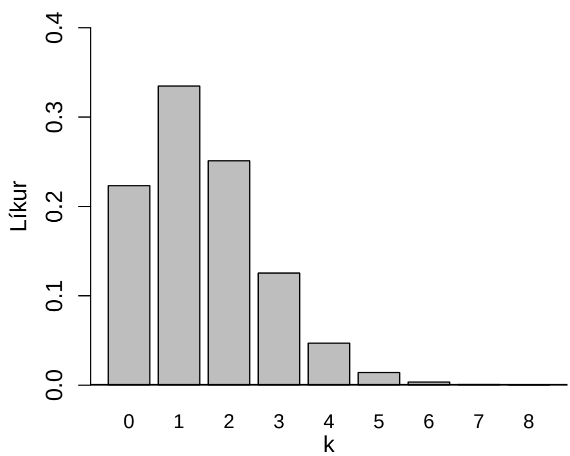
$$P(X \geq 1).$$

Þessar líkur getum við ekki reiknað beint þar sem það eru engin efri mörk. Við notum því jöfnu (5.6) til að umskrifa líkurnar og fáum

$$\begin{aligned} P(X \geq 1) &= 1-P(X<1) \\ &= 1-P(X=0) \\ &= 1-0.2231 \\ &= 0.7769. \end{aligned}$$

Líkurnar eru því um 77.7%.

Teiknum að lokum massafall slembibreytunnar X, $X \in P(1.5)$.



Þegar reikna á líkur á að slembistærð sem fylgir Poisson dreifingu taki eitthvert gildi fáum við λ oft gefið sem fjölda á annarri einingu en þeirri sem við viljum vinna með. Við gætum til dæmis vitað fjölda tilkynntra bilana af fólksbílagerð á hverjum degi en við viljum lýsa fjölda tilkynntra bilana á viku. Þá væri gefna einingin dagur en einingin sem við viljum vinna með er vika. Þá þarf að laga λ að nýrri einingu.

5.25. Poisson dreifingin löguð að nýrri einingu
Gerum ráð fyrir að slembistærðin $X \sim \text{Pois}(\lambda)$ lýsi fjölda jákvæðra útkoma á tiltekinni einingu. Þá lýsir slembistærðin $Y \sim \text{Pois}(a \cdot \lambda)$ fjölda jákvæðra útkoma á a einingum.

Sýnidæmi 5.13: Poisson dreifingin löguð að nýrri einingu
Gerum ráð fyrir að fjöldi tilkynntra bilana af ákveðinni fólksbílagerð fylgi Poisson dreifingu með stikann $\lambda = 8$. Hvaða líkindadreifingu fylgir fjöldi tilkynntra bilana á hverri viku?

Látum slembistærðina X tákna fjölda tilkynntra bilana á hverjum **degi**. Þá er gildir að $X \sim \text{Pois}(8)$. Látum slembistærðina Y tákna fjölda tilkynntra bilana á hverri **viku**. Þar sem það eru 7 dagar í hverri viku, er meðalfjöldi bilana á hverri viku $7 \cdot 8 = 56$. Því fylgir Y Poisson dreifingu með stikann $\lambda = 7 \cdot 8 = 56$ eða $Y \sim \text{Pois}(56)$.

Sýnidæmi 5.14: Poisson dreifingin löguð að nýrri einingu
Enn fjöllum við um Önnu Vigdísi og fjölda kúnna sem koma að hraðkassanum í Krónunni á hverri mínútu. Meðalfjöldi kúnna sem koma að kassanum er 1.5 á mínútu. Hverjar eru líkurnar á því að 4 kúnnar komi að kassanum á tveimur mínútum.

Við vitum að meðalfjöldi kúnna á **einni** mínútu er $1.5 = \lambda$. Nú eigum við að reikna líkurnar á að 4 kúnnar komi að kassanum á **tveimur** mínútum og þarf því að aðlaga λ að nýrri einingu.

Þar sem meðalfjöldi kúnna á einni mínútu er 1.5 reiknum við með því að á meðaltali komi $2 \cdot 1.5 = 3$ kúnnar á tveimur mínútum. Við notum því $\lambda = 3$. Notum jöfnu (5.12) og fáum

$$P(X = 4) = \frac{e^{-3}3^4}{4!} = 0.1680$$

Líkurnar eru því um 16.8%.

Sýnidæmi 5.15: Poisson dreifingin
Gerum ráð fyrir að fjöldi fæðinga á spítala nokkrum fylgi Poisson dreifingu með meðaltal 3 fæðingar á vakt.

a) Hverjar eru líkurnar á að á einni vakt fæðast fleiri en eitt barn?
b) Hverjar eru líkurnar á að á tveimur vöktum fæðist sex börn?

a) Við vitum að meðalfjöldi fæðinga er 3. Því er $\lambda = 3$. Við gerum ekki reiknað líkurnar beint þar sem það eru engin efri mörk. Við notum því jöfnu (5.7) til að umskrifa líkurnar og jöfnu (5.12) til að reikna líkurnar og fáum

$$\begin{aligned} P(X > 1) &= 1 - P(X \leq 1) \\ &= 1 - P(X = 1) - P(X = 0) \\ &= 1 - 0.15 - 0.05 = 0.80 \end{aligned}$$

Líkurnar eru því 80%.

b) Við eigum að finna líkurnar á að á tveimur vöktum fæðist sex börn, því notum við $\lambda = 2 \cdot 3 = 6$. Við reiknum líkurnar með jöfnu (5.12)

$$P(Y = 6) = \frac{e^{-6}6^6}{6!} = 0.16$$

Líkurnar eru því 16%.

Væntigildi og dreifni Poisson dreifingar

5.26. Væntigildi og dreifni Poisson dreifingar
Ef X fylgir Poisson dreifingu, $X \in \text{Pois}(\lambda)$ þá gildir

$$\mathrm{E}[X] = \lambda \tag{5.13}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \lambda. \tag{5.14}$$

Sýnidæmi 5.16: Poisson dreifingin
Látum X tákna slembistærð sem fylgir Poisson dreifingu með $\lambda = 2$. Finnið væntigildi og dreifni X.

Notum jöfnur 5.13 og 5.14 og fáum

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[X] &= \lambda = 2 \\ \mathrm{Var}[X] &= \lambda = 2. \end{aligned}$$

Samanburður á tvíkosta- og Poisson dreifingunni

Oft vill vefjast fyrir fólki hvort tvíkostadreifingin eða Poisson dreifingin eigi betur við til að lýsa strjálum breytum. Því viljum við skerpa á hvaða tilfelli eiga við hvora dreifingu:

- Tvíkostadreifinguna notum við þegar við höfum **endanlegan** fjölda tilrauna og við vitum **líkurnar** á því að hver og ein tilraun heppnist.
- Poisson dreifinguna notum við þegar við höfum **engin efri mörk** á fjölda tilrauna og við vitum **meðalfjölda** jákvæðra útkoma **á tiltekna einingu**.

Poisson dreifinguna má, líkt og tvíkostadreifinguna, tengja við Bernoulli tilraunir sjá kassa 5.20. Það gerum við þó einungis þegar fjöldi tilrauna er gríðarmikill og líkurnar á að hver og ein Bernoulli tilraun sé jákvæð eru litlar. Í því tilviki fáum við mjög svipaðar niðurstöður með því að nota Poisson dreifinguna í stað tvíkostadreifingarinnar. Það er mun auðveldara að reikna tilteknar líkur með Poisson dreifingunni heldur en tvíkostadreifingunni þegar n er mjög stórt og því kjósum við heldur að nota Poisson dreifinguna í þeim tilfellum. Þetta má orða sem svo að Poisson dreifingin sé góð *nálgun* (e. approximation) á tvíkostadreifingunni þegar n er mjög stórt.

5.4. Samfelldar líkindadreifingar

Meginmunur samfelldra og strjálla slembistærða er sá að samfelldar slembistærðir geta tekið hvaða gildi sem er á einhverju bili. Þar af leiðandi eru líkurnar á að samfelld slembistærð taki eitthvert eitt tiltekið gildi engar, þ.e.

$$P(X = x) = 0. \tag{5.15}$$

Athugið að þetta gildir um hvert eitt og einasta gildi sem slembistærðin getur tekið! Því gildir að

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) \tag{5.16}$$

þegar X er samfelld. Munið að þetta gildir almennt ekki um strjálar slembistærðir, samanber kassa 5.19.

5.27. Reiknireglur fyrir samfelldar slembistærðir
Um samfellda slembistærð X gildir að:

$$P(X > a) = 1 - P(X < a) \tag{5.17}$$

$$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a). \tag{5.18}$$

Við sáum hvernig sérhverri strjálli dreifingu er lýst með massafalli sem við notum til að reikna líkur á að slembistærð sem fylgir strjálli dreifingu taki ákveðið gildi. Sú aðferð er hins vegar ónothæf til að lýsa samfelldum slembistærðum, þar sem líkurnar á því að þær taki ákveðið stakt gildi eru alltaf núll, sama hvert gildið er, samanber jöfnu (5.15). Þess í stað lýsum við líkunum á því að samfelldar slembistærðir taki gildi á tilteknum **bilum**.

Skoðum nú aftur reiknireglurnar í kassa 5.27. Þær fela í sér að ef við viljum reikna líkurnar á því að X lendi á tilteknu bili, þá dugir okkur að geta reiknað $P(X < x)$ fyrir hvaða x sem er. Með öðrum orðum, reiknað líkurnar á því að slembistærðin taki gildi sem er minna en eitthvað ákveðið viðmiðunargildi x, fyrir hvaða viðmiðunargildi x sem er. *Dreififall* (distribution function) er einmitt fallið sem reiknar þessar líkur.

5.28. Dreififall (Distribution function)

Með *dreififalli* reiknum við líkurnar á að samfelld slembistærð X taki gildi sem er minna en viðmiðunargildið x. Við táknum dreififallið með $F(x)$ og það má skrifa sem

$$F(x) = P(X < x)$$

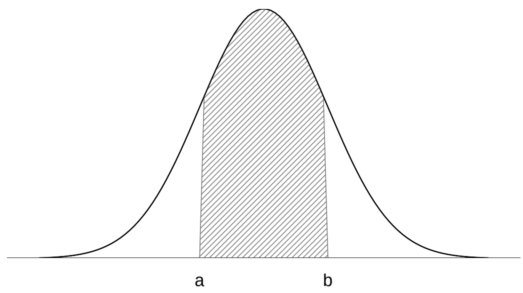
Við stingum viðmiðunargildi x inn í fallið og fáum út líkurnar á því að slembistærðin X, sem dreififallið lýsir, taki gildi sem er minna en x.

Ekki er til lokuð formúla til að lýsa dreififalli margra algengra líkindadreifinga, eins og t.d. normaldreifingarinnar. Þess í stað er henni lýst með *þéttifalli* líkindadreifingarinnar.

5.29. Þéttifall og þéttiferill (Density function and density curve)

Þéttifall (density function) er táknað með $f(x)$ og kallast graf þess *þéttiferill* (density curve). Flatarmálið undir þéttiferlinum milli tveggja stærða a og b er jafnt $P(a < X < b)$, líkunum á því að slembistærðin taki gildi á milli a og b. Þetta er sýnt á mynd 5.3.

Þar sem líkurnar á að slembistærð taki hvaða gildi sem er eru 100% eða 1, er heildarflatarmálið undir þéttiferlinum öllum alltaf 1. Ef þið þekkið til heildunar þá hafið þið kannski áttað ykkur á því að dreififallið er einmitt stofnfall þéttifallsins.



Mynd 5.3: Þéttiferill þéttifalls samfelldrar dreifingar

5.4.1. Normaldreifing

Eins og nefnt var í upphafi kaflans er normaldreifingin mest notaða líkindadreifing tölfræðinnar. Lýsa má margs konar breytum með normaldreifingu svo sem hæð, blóðþrýstingi, þyngd og svo mætti lengi telja og mikilvægi hennar verður enn ljósara þegar farið verður í höfuðsetningu tölfræðinnar í kafla 6. Normaldreifingunni er lýst með stikunum μ, sem er meðaltal hennar og σ^2 sem er dreifni hennar.

5.30. Normaldreifingin (normal distribution)

Gerum ráð fyrir að slembistærðin X fylgi normaldreifingu með meðaltal μ og dreifni σ^2, táknað $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Þá er þéttifall hennar, táknað með $\phi(x)$, gefið með

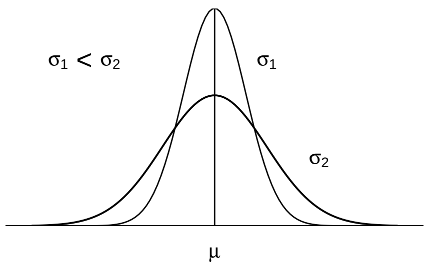
$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \tag{5.19}$$

Dreififall normaldreifingarinnar er táknað með $\Phi(x)$.

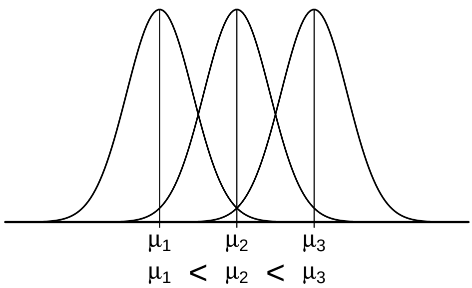
Meðaltal normaldreifingarinnar er táknað með μ en dreifni hennar er táknuð með σ^2. Staðalfrávik hennar er þar af leiðandi σ. Dreififallið $\Phi(x)$ er jafnt $P(X < x)$ og gefur því líkurnar á að slembistærðin X taki gildi sem er minna en x. Það er ekki hægt að skrifa einfalda jöfnu fyrir $\Phi(x)$.

Til að ná góðum tökum á normaldreifingunni er mikilvægt að átta sig á því hvernig þéttiferill hennar lítur út og hvaða áhrif stikarnir μ og σ^2 hafa á hann. Þéttiferillinn er samhverfur og bjöllulaga og miðja hans er μ, meðaltal dreifingarinnar. Dreifnin, σ^2 stýrir því hins vegar hversu flatur ferillinn er. Þeim stærri sem σ^2 er, þeim flatari er ferillinn og toppur hans lægri.

Á mynd 5.4 má sjá tvær normaldreifingar. Meðaltal dreifinganna, μ, er það sama þar sem miðja þeirra er á sama stað. Dreifni dreifingar 1 er hins vegar minni en dreifni dreifingar 2. Á mynd 5.5 má sjá þrjár normaldreifingar sem allar hafa sömu dreifnina. Meðaltal dreifingar 1 er það lægsta og meðaltal dreifingar 3 það hæsta.



Mynd 5.4: Tvær normaldreifingar með sama meðaltal en ólíka dreifni



Mynd 5.5: Þrjár normaldreifingar með sömu dreifni en ólík meðaltöl

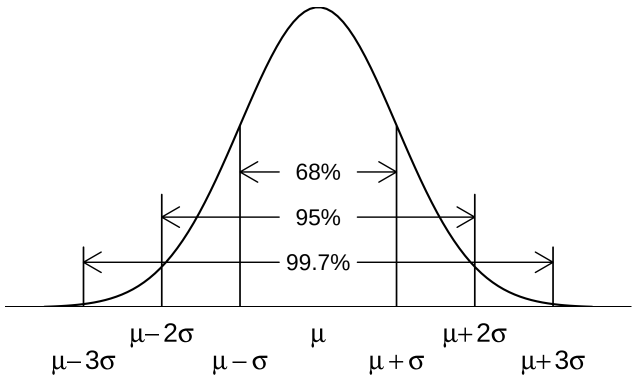
5.31. 68-95-99.7% reglan

Fyrir sérhverja normaldreifingu með meðaltal μ og dreifni σ^2 og þar af leiðandi staðalfrávik σ gildir að

- u.þ.b 68% mælinga munu liggja innan við eitt staðalfrávik frá meðaltalinu

- u.þ.b 95% mælinga munu liggja innan við tvö staðalfrávik frá meðaltalinu
- u.þ.b 99.7% mælinga munu liggja innan við þrjú staðalfrávik frá meðaltalinu

Þetta má sjá á mynd 5.6



Mynd 5.6: 68-95-99.7% reglan

Stöðluð normaldreifing

Normaldreifing með meðaltal $\mu = 0$ og dreifni $\sigma^2 = 1$ er kölluð staðlaða normaldreifingin. Hefð er fyrir því að tákna slembibreytur sem fylgja stöðluðu normaldreifingunni með bókstafnum Z.

5.32. Staðlaða normaldreifingin (Standardized normal distribution)

Ef slembistærðin X fylgir normaldreifingu með meðaltal μ og dreifni σ^2, skrifað

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

þá fylgir

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \tag{5.20}$$

normaldreifingu með meðaltal 0 og dreifni 1, skrifað

$$Z \sim N(0, 1).$$

5.33. Samband X og Z
Ef slembistærðin X fylgir normaldreifingu með meðaltal μ og dreifni σ^2, $X \in N(\mu, \sigma^2)$, og slembistærðin Z fylgir stöðluðu normaldreifingunni, $Z \in N(0,1)$, þá gildir að

$$P(X \leq x) = P(Z \leq z) \tag{5.21}$$

þar sem $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

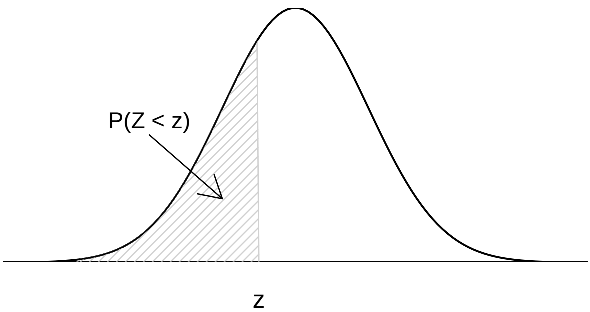
Aðgerðina $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ köllum við að *staðla* og í kassa 5.34 sjáum við hvernig nota má hana til að reikna líkur fyrir hvaða normaldreifðu slembistærð sem er út frá stöðluðu normaldreifingunni.

Líkur normaldreifðra slembistærða

Dreififallið $\Phi(z)$ er gefur líkurnar á að normaldreifing sem fylgir stöðluðu normaldreifingunni taki gildi sem er minna en z, þ.e.

$$\Phi(z) = P(Z < z),$$

Viðmiðunargildið z sem við reiknum líkurnar fyrir er kallað *z-gildið*. Mynd 5.7 sýnir samband dreififallsins $\Phi(z)$ og þéttiferils normaldreifingarinnar. Líkurnar $\Phi(z)$ eru jafnar flatarmálinu undir þéttiferlinum vinstra megin við z-gildið.



Mynd 5.7: Staðalaða normaldreifingin.

Þar sem ekki er hægt að skrifa einfalda formúlu fyrir $\Phi(z)$ eru búnar til gildistöflur þar sem útkoma dreififallsins hefur verið reiknuð fyrir fjölmörg viðmiðunargildi z. Umræddar gildistöflur eru eingöngu birtar fyrir *stöðluðu normaldreifinguna* og því þarf að *staðla* gildin okkar áður en flett er upp í töflunni. Sú aðferð er útskýrð í kassa 5.22. Á blaðsíðum 260 - 263 má finna gildistöflur fyrir stöðluðu normaldreifinguna.

Ef finna á líkurnar

$$P(Z > z)$$

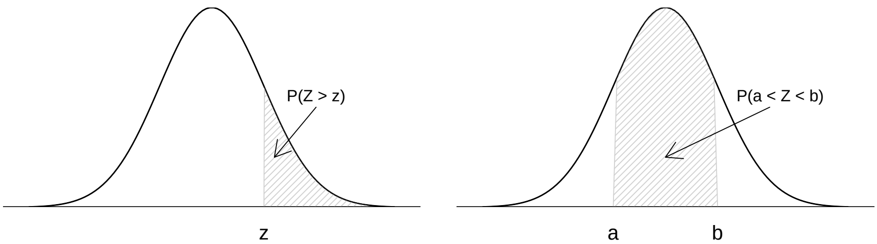
notum við okkur jöfnu 5.17

$$P(Z > z) = 1 - P(Z < z).$$

Þetta er sýnt vinstra megin á mynd 5.8. Ef finna á líkurnar á að Z liggi á bilinu frá a til b notum við jöfnu 5.18

$$P(a < Z < b) = P(Z < b) - P(Z < a).$$

Þetta er sýnt hægra megin á mynd 5.8. Munið að töfluna er eingöngu hægt að nota fyrir stöðluðu normaldreifinguna.



Mynd 5.8: $P(Z > z)$ og $P(a < Z < b)$ þar sem $Z \sim N(0,1)$

5.34. Notkun töflu stöðluðu normaldreifingarinnar
Hægt er að nota töfluna á tvo vegu:

1. Ef við viljum finna líkurnar sem svara til ákveðins viðmiðunargildis:

   Ef gildið er fengið úr staðlaðri normaldreifingu er það gildi sjálft z-gildið. Ef gildið er ekki fengið úr staðlaðri normaldreifingu finnum við staðlaða z-gildið með
   $$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
   Við finnum z-gildið í töflunni (feitletrað) og líkurnar eru $\Phi(z)$ gildið því á hægri hlið.

2. Ef við viljum finna hvaða viðmiðunargildi svarar til ákveðinna líkinda:

   Við finnum líkurnar, eða þær líkur sem þeim eru næstar, meðal $\Phi(z)$-gildanna í töflunni og z-gildið stendur (feitletrað) því á vinstri hlið.

   Ef viðmiðunargildið er ekki fengið úr staðlaðri normaldreifingu þurfum við að *varpa* z-gildinu aftur í upphaflegu dreifinguna, svo tilsvarandi gildi verður
   $$x = \mu + z\sigma \tag{5.22}$$

Skoðum nú með tveimur dæmum hvernig nota skal töfluna. Í fyrra dæminu (í þremur liðum) þekkjum við viðmiðunargildið og viljum finna líkurnar en í því seinna þekkjum við líkurnar en viljum finna viðmiðunargildið.

Sýnidæmi 5.17: Normaldreifingin

Í USA þurfa nemendur að þreyta staðlað próf, svokallað SAT próf, áður en þeir fara í menntaskóla. Gera má ráð fyrir því að einkunnir nemenda á prófinu séu u.þ.b normaldreifðar með meðaltal 1026 og staðalfrávik 209. Köllum nú einkunnirnar X, $X \sim N(1026, 209^2)$.

a) Reiknið líkurnar á að einkunn nemanda sem þreytir prófið og valinn er af handahófi sé lægri en 720, þ.e.a.s. $P(X \leq 720)$.

b) Reiknið líkurnar á að einkunn nemanda sem þreytir prófið og valinn er af handahófi sé hærri en 820, þ.e.a.s $P(X \geq 820)$.

c) Reiknið líkurnar á að einkunn nemanda sem þreytir prófið og valinn er af handahófi sé á bilinu 720 og 820, þ.e.a.s $P(720 \leq X \leq 820)$.

a) Við höfum $X \sim N(1026, 209^2)$ og viljum reikna

$$P(X < 720).$$

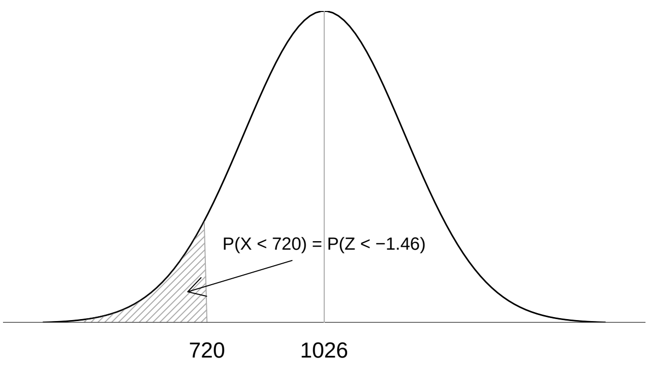
Áður en við getum notað töfluna þurfum við að staðla:

$$\frac{720 - 1026}{209} = -1.46$$

Þá fæst, skv. jöfnu (5.21)

$$P(X < 720) = P(Z < -1.46)$$

Við notum töfluna og finnum að $\Phi(z) = 0.0721$ eða u.þ.b. 7 % líkur.



b) Við höfum $X \sim N(1026, 209^2)$ og viljum reikna

$$P(X > 820).$$

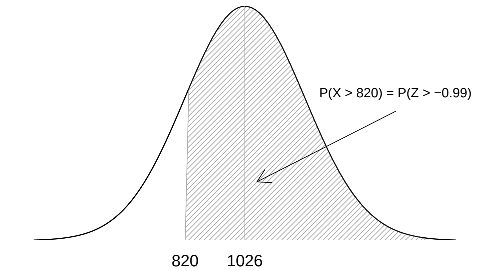
Áður en við getum notað töfluna þurfum við að staðla:

$$\frac{820 - 1026}{209} = -0.99$$

Þá fæst, skv. jöfnum (5.17) og (5.21)

$$P(X > 820) = P(Z > -0.99) = 1 - P(Z < -0.99)$$

$\Phi(-0.99) = 0.1611$, svo líkurnar eru 1-0.1611 = 0.8389 eða u.þ.b 84%.



c) Við höfum $X \sim N(1026, 209^2)$ og viljum reikna

$$P(720 < X < 820).$$

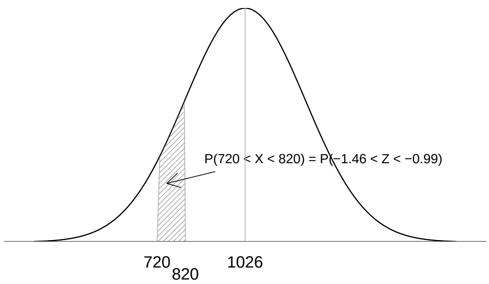
Við náum í stöðluðu gildin frá í a) og b) lið.
Við fáum þá, skv. jöfnum (5.17) og 5.21:

$$P(720 < X < 820) = P(-1.46 < Z < -0.99) = P(Z < -0.99) - P(Z < -1.46)$$

Við vorum búin að fletta upp að $\Phi(-0.99) = 0.1611$ og $\Phi(-1.46) = 0.0721$ svo líkurnar eru

$$0.1611 - 0.0721 = 0.089$$

eða u.þ.b 9%.



Sýnidæmi 5.18: Normaldreifingin
Hvaða einkunn þarf nemandi að ná í SAT prófinu ætli hann sér að vera í hópi 10% efstu nemendanna?

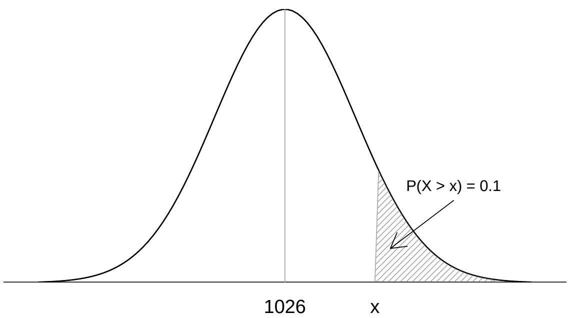
Sé nemandi í hópi 10% efstu nemendanna eru 90% nemenda með lægri einkunn en hann. Við viljum því finna hvaða viðmiðunargildi svarar til þess að líkur þess að taka gildi minna en það séu 90%.

Til þess þurfum við að finna það z-gildi sem er þannig að $\Phi(z)$ sé sem næst 0.9. Við sjáum i töflunni að það gildi sem kemst næst því er $z = 1.28$ en $\Phi(1.28) = 0.8997$ sem er mjög nærri 0.9.

Einkunnir nemendanna fylgdu ekki stöðluðu normaldreifingunni heldur var $X \sim N(1026, 209^2)$ svo við verðum að varpa z-gildinu í upphaflegu dreifinguna með því að nota jöfnu (5.22)

$$x = \mu + z\sigma$$

Lágmarkseinkunnin er því $1026 + 1.28 \cdot 209 = 1292.5$ stig.



Rithátturinn z_a

Síðar í þessari bók, þegar farið verður í ályktunartölfræði, munum við nota töflu stöðluðu normaldreifingarinnar mikið. Því kynnum við til sögunnar þægilegan ritháttt sem við munum nota héðan í frá. Í tilviki stöðluðu normaldreifingarinnar er hann z_a en þið munuð síðar í þessum kafla sjá dæmi um þennan ritháttt fyrir fleiri líkindadreifingar.

5.35. Rithátturinn z_a
Með z_a táknum við það z-gildi sem er þannig að slembistærð sem fylgir stöðluðu normaldreifingunni hefur líkurnar a að taka gildi sem er **minna** en z_a.

Þetta má skrifa sem:

$$a = P(Z < z_a).$$

þar sem Z fylgir stöðluðu normaldreifingunni. z_a er því a-ta prósentumark (sjá kafla 4.3.5) stöðluðu normaldreifingarinnar.

Sýnidæmi 5.19: Rithátturinn z_a
Notið töflu staðlaðrar normaldreifingar á blaðsíðum 260 - 263 til að finna $z_{0.95}$.

Hér þekkjum við líkurnar en okkur vantar z-gildið. Við finnum því 0.95 meðal Φ-gildanna í töflunni og lesum z-gildið við hlið þess. Í töflunni má sjá að

$$\Phi(1.64) = 0.95$$

svo

$$z_{0.95} = 1.64.$$

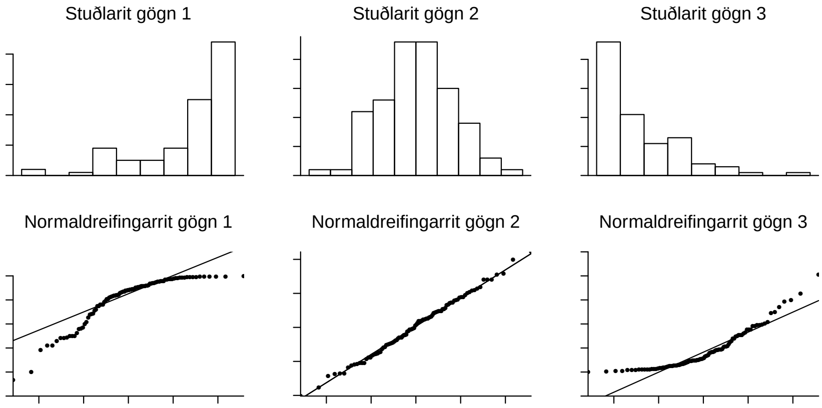
Normaldreifingarrit

Margar tölfræðilegar aðferðir eru háðar því að gögnin sem þeim er beitt á fylgi normaldreifingu. Áður en aðferðirnar eru notaðar þarf því að ganga úr skugga um að svo sé raunin. Ýmsar aðferðir finnast til þess og er algengt að nota svonefnt *normaldreifingarrit*. Normaldreifingarrit er myndræn aðferð til að kanna hvort gögn fylgi normaldreifingu eða ekki. Normaldreifingarrit eru sjaldan gerð í höndunum heldur er notast við tölfræðiforrit en mikilvægt er að kunna að túlka þau.

5.36. Normaldreifingarrit (normal probability plot)

Ef punktarnir á normaldreifingarritinu liggja nálægt beinu línunni sem sýnd er á ritinu og endapunktarnir báðum megin sveigjast ekki afgerandi upp eða niður þá er ásættanlegt að gera ráð fyrir að gögnin fylgi normaldreifingu.

Á mynd 5.9 má sjá stuðlarit og normaldreifingarrit af þremur gagnasöfnum. Ekki er hægt að gera ráð fyrir að gagnasöfn 1 og 3 fylgi normaldreifingu þar sem punktarnir eru ekki nægilega nálægt beinu línunni. Það má aftur á móti gera ráð fyrir að gagnasafn 2 fylgi normaldreifingu þar sem punktarnir á normaldreifingarritinu liggja nálægt beinu línunni.



Mynd 5.9: Normaldreifingarrit

5.4.2. Aðrar samfelldar líkindadreifingar

Nú tekur við umfjöllun um aðrar líkindadreifingar en normaldreifinguna. Sú fyrsta sem við munum fjalla um er t-dreifingin, eða Student's t. Hún er samfelld líkindadreifing sem minnir á normaldreifinguna. Hún er bjöllulaga og samhverf um meðaltal dreifingarinnar sem er 0. Við munum nota t-dreifinguna til að framkvæma ályktunartölfræði í köflum 8 og 10.

t-dreifing

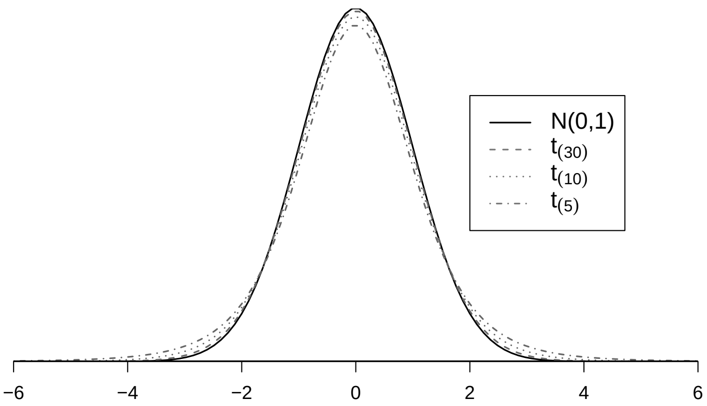
t-dreifingin hefur einn stika sem kallast frígráður . Hann ræður lögun hennar. Við táknum fjölda frígráða með bókstafnum k. t-dreifingu með k frígráður táknum við með $t_{(k)}$.

t-töflu má finna í blaðsíðu 264. Við flettum upp í töflunni eftir fjölda frígráða. Gildin sem við fáum út úr töflunni táknum við með $t_{a,(k)}$. Um $t_{a,(k)}$ gildir að slembistærð sem fylgir t-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar a að taka gildi sem er **minna** en $t_{a,(k)}$. Dálkur er valinn eftir a-gildinu en lína eftir fjölda frígráða.

5.37. Rithátturinn $t_{a,(k)}$
Með $t_{a,(k)}$ táknum við það t-gildi sem er þannig að slembistærð sem fylgir t-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar a að taka gildi sem er **minna** en $t_{a,(k)}$. Þetta má skrifa sem:

$$a = P(T < t_{a,(k)}).$$

þar sem T fylgir t-dreifingu með k frígráður. $t_{a,(k)}$ er því a-ta prósentumark t-dreifingar með k frígráður.



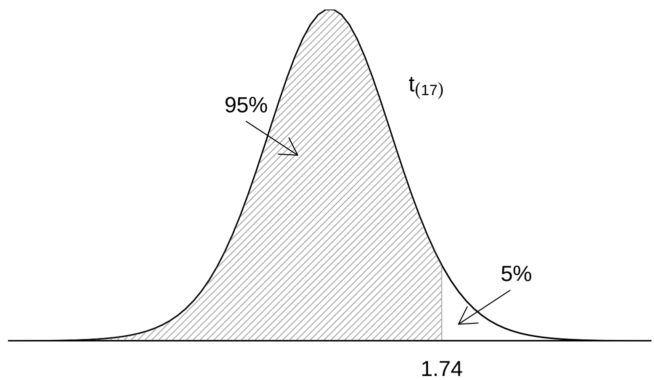
Mynd 5.10: Nokkrar t-dreifingar

Eftir því sem fjöldi frígráða eykst því meira líkist t-dreifingin stöðluðu normaldreifingunni. Á mynd 5.10 má sjá nokkrar t-dreifingar ásamt stöðluðu normaldreifingunni.

Sýnidæmi 5.20: Flett upp í t-töflu

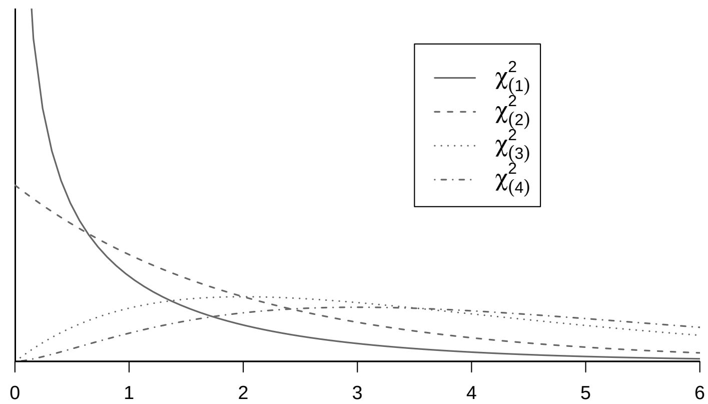
Finnið $t_{0.95,(17)}$.

Við notum t-töfluna á blaðsíðu 264. Við veljum $a = 0.95$ dálkinn og $k = 17$ línuna í töflunni og fáum út að $t_{0.95,(17)} = 1.740$.



χ^2-dreifing

χ^2-dreifingin, lesist kí-kvaðrat dreifingin, er samfelld líkindadreifing og er hún mikið notuð í ályktunartölfræði. Hún er ekki samhverf eins og normaldreifingin. χ^2-dreifingin hefur einn stika, kallaður frígráður, sem ræður lögun hennar. Eins og í t-dreifingunni notum við k til að tákna fjölda frígráða. χ^2-dreifingu með k frígráður táknum við með $\chi^2_{(k)}$. Meðaltal χ^2-dreifingar er jafnt fjölda frígráða hennar. Á mynd 5.11 má sjá nokkrar χ^2-dreifingar. χ^2-töflu má finna á blaðsíðu 265. Við flettum upp í töflunni



Mynd 5.11: Nokkrar χ^2-dreifingar

eftir fjölda frígráða. Gildin sem við fáum út úr töflunni táknum við með $\chi^2_{a,(k)}$. Um $\chi^2_{a,(k)}$ gildir að slembistærð sem fylgir χ^2-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar a á að taka gildi sem er **minna** en $\chi^2_{a,(k)}$. Við veljum dálk eftir a-gildinu en línu eftir fjölda frígráða.

5.38. Rithátturinn $\chi^2_{a,(k)}$

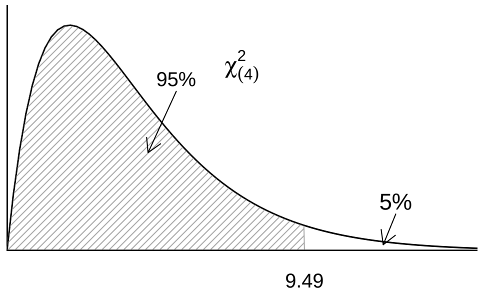
Með $\chi^2_{a,(k)}$ táknum við það χ^2-gildi sem er þannig að slembistærð sem fylgir χ^2-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar a að taka gildi sem er **minna** en $\chi^2_{a,(k)}$. Þetta má skrifa sem:

$$a = P(\chi^2 < \chi^2_{a,(k)}).$$

þar sem χ^2 fylgir χ^2-dreifingu með k frígráður. $\chi^2_{a,(k)}$ er því a-ta prósentumark χ^2-dreifingar með k frígráður.

Sýnidæmi 5.21: Flett upp í χ^2-töflu
Finnið $\chi^2_{0.95,(4)}$.

Við notum χ^2-töfluna á blaðsíðu 265. Við veljum $a = 0.95$ dálkinn og $k = 4$ línuna í töflunni og fáum út að $\chi^2_{0.95,(4)} = 9.488$.



F-dreifing

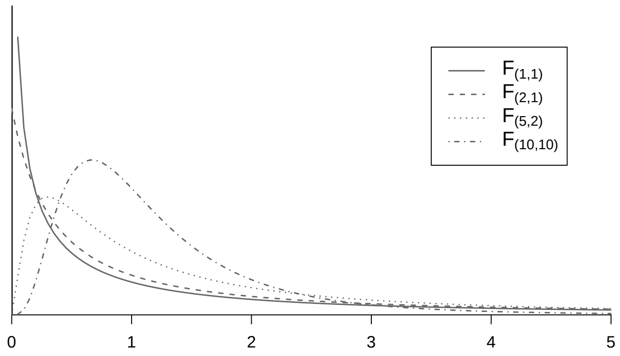
F-dreifingin er samfelld líkindadreifing sem við munum nota þegar kemur að ályktunartölfræði. Líkt og χ^2-dreifingin er hún ekki samhverf. F-dreifingin hefur tvo stika sem við köllum frígráður og táknum með v_1 og v_2. Lögun dreifingarinnar ræðst af fjölda frígráða. F-dreifingu með v_1 og v_2 fjölda frígráða táknum við með $F_{(v_1,v_2)}$.

Fjórar F-töflur má finna á blaðsíðum 266 - 269 og þarf að passa vel að nota þá réttu hverju sinni. Töflurnar fjórar eru fyrir fjögur mismunandi a-gildi, $a = 0.90$, $a = 0.95$, $a = 0.975$ og $a = 0.99$. Dálkarnir í töflunum tákna mismunandi gildi á v_1 og línurnar mismunandi gildi á v_2. Gildin sem við fáum út úr töflunni táknum við svo með $F_{a,(v_1,v_2)}$. Um $F_{a,(v_1,v_2)}$ gildir að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með v_1 og v_2 frígráður hefur líkurnar a á að taka gildi sem er **minna** en $F_{a,(v_1,v_2)}$. Á mynd 5.12 má sjá nokkrar F-dreifingar.

5.39. Rithátturinn $F_{a,(v_1,v_2)}$
Með $F_{a,(v_1,v_2)}$ táknum við það F-gildi sem er þannig að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með v_1 og v_2 frígráður hefur líkurnar a að taka gildi sem er **minna** en $F_{a,(v_1,v_2)}$. Þetta má skrifa sem:

$$a = P(F < F_{a,(v_1,v_2)}).$$

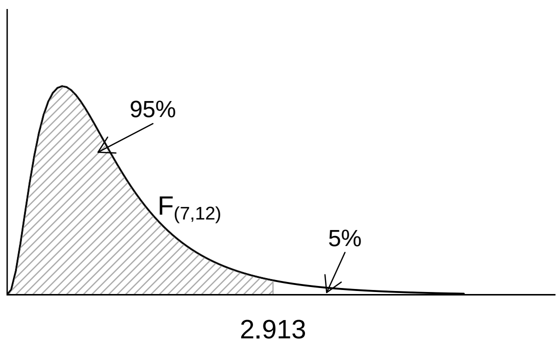
þar sem F fylgir F-dreifingu með v_1 og v_2 frígráður. $F_{a,(v_1,v_2)}$ er því a-ta prósentumark F-dreifingar með v_1 og v_2 frígráður.



Mynd 5.12: Nokkrar F-dreifingar

Sýnidæmi 5.22: Flett upp í F-töflu
Finnið $F_{0.95,(7,12)}$.

Við notum F-töfluna á blaðsíðu 267 þar sem $a = 0.95$. Við veljum dálk $v_1 = 7$ og línu $v_2 = 12$ og fáum út að $F_{0.95,(7,12)}$ = 2.913.



Dæmi

Dæmi 5.1
Hvert er gildi tvíliðustuðulsins $\binom{8}{2}$?

Dæmi 5.2
Framkvæmum eftirfarandi tilraun: Við köstum teningi fjórum sinnum. Látum X tákna fjölda skipta sem annað hvort fimma eða sexa koma upp. X fylgir þá tvíkostadreifingu með stikana n og p. Hver eru gildin á n og p?

Dæmi 5.3
Sé teningi kastað 8 sinnum. Hverjar eru líkurnar að fá:

a) þrisvar sinnum fimmu?

b) tvo eða færri ása?

c) færri en þrjár sexur?

d) slétta tölu í öllum köstunum?

Dæmi 5.4
Atli líkindafræðingur ákveður að spila í happdrætti þar sem margir vinningar eru í boði. Líkurnar á að vinna á hvern miða í happdrættinu eru 1/100 eða 0.01. Atli ákveður að freista gæfunnar og kaupir 10 miða.

a) Hverjar eru líkurnar á að Atli vinni vinning á nákvæmlega einn af miðunum?

b) Hverjar eru líkurnar á að Atli vinni vinning á að minnsta kosti einn af miðunum?

Dæmi 5.5
Gerum ráð fyrir að fjöldi Kötlugosa á öld fylgi Poisson dreifingu með stikann $\lambda = 2$. Hverjar eru líkurnar á að minnsta kosti eitt Kötlugos verði á öld?

Dæmi 5.6
Líkurnar á að harður diskur af ákveðinni gerð bili á fyrsta árinu eftir að hann er tekinn í notkun er 0.1 eða 10%. Tökum nú úrtak af stærð 20 og gerum ráð fyrir að hörðu diskarnir séu óháðir. Við fylgjumst með diskunum í eitt ár og að ári loknu teljum við fjölda bilaðra diska. Látum nú X tákna fjölda harðra diska sem bila á fyrsta árinu.

a) Hvaða dreifingu fylgir slembistærðin X, fjöldi harðra diska sem bila á fyrsta árinu?

b) Hvert er væntigildi X, fjölda harðra diska sem bila á fyrsta árinu?

c) Hverjar eru líkurnar á að nákvæmlega þrír diskar úr úrtakinu muni bila á fyrsta árinu?

Dæmi 5.7
Gerum ráð fyrir að meðalfjöldi marka á mínútu í handboltaleik sé 0.8. Notum nú Y til að tákna fjölda marka á mínútu.

a) Hvaða dreifingu er eðlilegt er að gera ráð fyrir að slembistærðin Y, fjöldi marka á mínútu, fylgi?
b) Hverjar eru líkurnar á að í handboltaleik séu skoruð nákvæmlega tvö mörk á mínútu?
c) Hverjar eru líkurnar á að í handboltaleik séu skoruð nákvæmlega fimm mörk á þremur mínútum?

Dæmi 5.8
Hlutfall kvenkyns eðla af ákveðinni gerð sem fæðast á hitabeltiseyju langt langt í burtu er 0.48. Hverjar eru líkurnar á að í sex (einbura) fæðingum fæðist nákvæmlega þrjár kvenkyns eðlur?
Dæmi 5.9
Á hversu marga máta má fá þrjá þorska sé krónu kastað sjö sinnum?
Dæmi 5.10
Skiptiborðið í Arion banka fær að meðaltali 2.4 símtöl á mínútu. Reiknið líkurnar á að skiptiborðið fái:

a) þrjú símtöl á einni mínútu.
b) að minnsta kosti tvö símtöl á einni mínútu.
c) fleiri en þrjú símtöl á einni mínútu.
d) sex símtöl á tveimur mínútum.
e) sjö símtöl á þremur mínútum.

Dæmi 5.11
Stefnt er að því að sólarrafvæða vita hér á landi á næstu árum. Því er haldið fram að spara megi rafmagnsnotkun vitanna um helming í 40% tilfella. Hverjar eru líkurnar á að rafmagnsnotkun minnki um helming í:

a) fjórum af fimm vitum sem hafa verið sólarrafvæddir?
b) að minnsta kosti fjórum af fimm vitum sem hafa verið sólarrafvæddir?
c) færri en tveimur af fimm vitum sem hafa verið sólarrafvæddir?
d) tveimur eða færri af fimm vitum sem hafa verið sólarrafvæddir?

Dæmi 5.12
Fjöldi bíla sem fer yfir kindahlið á sveitavegi nokkrum á Snæfellsnesi er að meðaltali 1.8 á mínútu. Reiknið líkurnar að á einni mínútu fari:

a) enginn bíll yfir hliðið.
b) tveir bílar yfir hliðið.
c) færri en tveir bílar yfir hliðið.
d) einn eða fleiri bílar yfir hliðið.

Dæmi 5.13
Að meðaltali seljast 1.8 Corny sælgætisstykki á hverjum klukkutíma í Select versluninni á Birkimel. Georg er samviskusamur starfsmaður og hefur tekið eftir því sér til skelfingar að öll Corny sælgætisstykkin eru búin í versluninni. Hann hringir í ofboði eftir fleiri stykkjum en þau eru ekki væntanleg fyrr en eftir klukkutíma.

a) Hverjar eru líkurnar á því að Georg fá engan viðskiptavin sem hefði hug á því að kaupa sér Corny stykki á þeim tíma?
b) Um leið og Georg hefur lagt niður símtólið uppgötvar hann sér til mikillar ánægju að eitt Corny stykki leynist í Kit-kat kassanum. Hverjar eru nú líkurnar á því að Georg geti fullnægt eftirspurn viðskiptavina um Corny sælgætisstykki, ef einhver verður, næsta klukkutímann.

Dæmi 5.14
Finnið eftirfarandi gildi í viðeigandi töflu:

a) $z_{0.975}$, $z_{0.1}$, $z_{0.05}$, $z_{0.95}$.
b) $t_{0.95,(40)}$, $t_{0.90,(3)}$, $t_{0.975,(17)}$, $t_{0.05,(12)}$.
c) $\chi^2_{0.95,(1)}$, $\chi^2_{0.05,(2)}$, $\chi^2_{0.975,(17)}$, $\chi^2_{0.99,(3)}$.
d) $F_{0.95,(10,20)}$, $F_{0.90,(20,10)}$, $F_{0.975,(3,17)}$, $F_{0.99,(5,5)}$.

Dæmi 5.15
Hvert er gildið á $\Phi(z)$ þegar:

a) z = -0.82?
b) z = 1.96?
c) z = 1.65?
d) z = 0.0?

Dæmi 5.16
Ögmundur er að fást við normaldreifingu með meðaltal 8 og dreifni 4. Hann hefur gildið $x = 10$. Hvert er tilsvarandi staðlað z-gildi?

Dæmi 5.17
Slembistærðin Z fylgir staðlaðri normaldreifingu, $Z \sim N(0,1)$. Reiknið:

a) $P(Z < 2.5)$.
b) $P(Z \leq 2.5)$.
c) $P(Z > 2.5)$.
d) $P(Z = 2.5)$.

Dæmi 5.18
Þyngd sex ára barna í landi nokkru fylgir normaldreifingu með meðaltal 21 kg og staðalfrávik 2.8 kg. Sé barn valið af handahófi, hverja eru líkurnar á að barnið sé:

a) léttara en 20 kg?
b) þyngra en 30 kg?
c) á bilinu 17 til 19 kg?
d) á bilinu 25 til 27 kg?
e) 21 kg?

Dæmi 5.19
Gerum ráð fyrir að slembistærðin Z fylgi stöðluðu normaldreifingunni. Hvert er gildið á z ef $P(Z > z) = 0.0287$?

Dæmi 5.20
Sigrún er mikil áhugakona um samgöngumál og er mikið í mun að breyta samgönguvenjum stúdenta Háskóla Íslands. Hún hefur sér í lagi áhuga á að skoða hversu langa vegalengd stúdentar sem ferðast á einkabílum aka frá heimili sínu og í Háskólann. Sigrún hefur undir höndum metnaðarfulla skýrslu sem verkfræðistofa hér í bæ vann. Í henni segir að gera megi ráð fyrir vegalengd þeirra nemenda sem aka á einkabílum í Háskólann fylgi normaldreifingu með meðaltal 8.2 kílómetrar og staðalfrávik 2.2 kílómetrar.

a) Sé nemandi sem notar einkabíl til að komast í Háskólann valinn af handahófi, hverjar eru líkurnar á að hann aki 8.2 kílómetra í skólann?
b) Sé nemandi sem notar einkabíl til að komast í Háskólann valinn af handahófi, hverjar eru líkurnar að hann þurfi að aka meira en 10 kílómetra til að komast í skólann?
c) Sé nemandi sem notar einkabíl til að komst í Háskólann valinn af handahófi, hverjar eru líkurnar á að hann þurfi að aka á milli 10 og 12 kílómetra til að komast í skólann?
d) Sé nemandi sem notar einkabíl til að komst í Háskólann valinn af handahófi, hverjar eru líkurnar á að hann þurfi að aka minna en 3.7 kílómetra til að komast í skólann?
e) Hversu langt þyrfti nemandi að aka að lágmarki til að vera í hópi þeirra 10% nemenda sem aka hve lengst í Háskólann?
f) Hversu langt mætti nemandi að aka að hámarki til að vera í hópi þeirra 20% nemenda sem aka hve styst í Háskólann?

Dæmi 5.21
Vísindamaður nokkur frá fjarlægu landi hefur mikinn áhuga á simpönsum. Eftir áralanga rannsóknir á þessum frændum okkar þróaði vísindamaðurinn simpansagreindarvísitölu sem hann kallaði SIQ. Rannsóknir hans sýndu einnig að SIQ í ákveðnum hóp simpansa fylgir normaldreifingu með meðaltal 100 stig og staðalfrávik 16 stig.

a) Sé simpansi valinn af handahófi úr hópnum, hverjar eru líkurnar á að hann hafi greindarvísitölu sem er hærri en 120 stig?
b) Sé simpansi valinn af handahófi úr hópnum, hverjar eru líkurnar á að hann hafi greindarvísitölu á bilinu 90 til 120 stig?
c) Hversu háa SIQ þarf simpansi að hafa til að vera meðal 10% greindustu simpansa í hópnum?

Dæmi 5.22
Normaldreifing nokkur hefur þéttifallið $f(x) = \phi(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-10}{4}\right)^2}$. Hver eru meðaltal hennar og dreifni?

Dæmi 5.23
Þyngd íslenskra karlmanna á aldrinum 25 til 35 ára fylgir u.þ.b. normaldreifingu með meðaltal 85.6 kg og staðalfrávik 9.1 kg.

a) Sé íslenskur karlmaður á aldrinum 25 til 35 ára valinn af handahófi hverjar eru líkurnar að hann sé þyngri en 100 kg?
b) Sé íslenskur karlmaður á aldrinum 25 til 35 ára valinn af handahófi hverjar eru líkurnar að hann sé léttari en 75 kg?
c) Sé íslenskur karlmaður á aldrinum 25 til 35 ára valinn af handahófi hverjar eru líkurnar að hann sé á milli 75 og 100 kg?
d) Sé íslenskur karlmaður á aldrinum 25 til 35 ára valinn af handahófi hverjar eru líkurnar að hann sé nákvæmlega 85.6 kg?
e) Sigga landfræðinema þykir bjórinn góður og er hann með dálítið stóra ístru fyrir vikið. Læknirinn hans hefur svolitlar áhyggjur af holdarfari Sigga og ráðleggur honum að megra sig. Siggi ákveður því að létta sig og setur sér það markmið að ná þeirri þyngd þannig að, að minnsta kosti 30 % íslenskra karlmanna á aldrinum 25 til 35 ára séu þyngri en hann. Hvaða þyngd þarf Siggi að ná?

6. kafli

Ályktunartölfræði

Ályktunartölfræði er samheiti yfir allar þær aðferðir sem nota úrtak til að draga ályktanir um allt þýðið. Ályktunartölfræði er þarf af leiðandi eingöngu hægt að framkvæma á *slembiúrtökum*. Því leyfum við okkur, þegar við fjöllum um ályktunartölfræði, að tala um úrtök þegar við eigum í raun eingöngu við slembiúrtök. Í þessum kafla lýsum við þeirri hugmyndafræði sem ályktunartölfræði byggir á og munum við notast við þau hugtök sem hér eru kynnt í hverjum einasta kafla héðan frá.

Nú þegar við höfum fengið góð kynni af slembistærðum má sjá *lýsistærðir*, sem við kynntumst í kafla 4, í nýju ljósi. Við gerum ráð fyrir að mælingar á breytu séu gildi sem slembistærð hefur tekið og um leið áttum við okkur á því að þau gildi breytast sennilega ef nýtt úrtak er valið. Lýsistærðir verða reiknaðar út frá mælingunum okkar og þegar mælingarnar breytast þá er að sama skapi líklegt að lýsistærðirnar breytist um leið. Þar af leiðandi eru lýsistærðir í raun slembistærðir!

Við byrjum á að fjalla um hvaða áhrif líkindadreifing slembistærða hefur á þær mælingar sem við munum sjá sem og lýsistærðirnar sem út frá þeim eru reiknaðar. Í kafla 6.1 kynnumst við *úrtaksdreifingu lýsistærðar* og veitum úrtaksdreifingu meðaltals sérstaka athygli í kafla 6.2. Þannig leggjum við grunninn fyrir *höfuðsetningu tölfræðinnar*, en henni kynnumst við í kafla 6.3.

Í ályktunartölfræði reiðum við okkur á lýsistærðir, sér í lagi *metla* og *prófstærðir*. Þeim kynnumst við í kafla 6.4. Í kafla 6.5 reiknum við *öryggisbil* fyrir gildi stikanna sem segja okkur hvaða önnur gildi en matið sjálft eru líkleg. Að lokum notum við prófstærðir í kafla 6.6 þegar við framkvæmum *tilgátupróf* sem leyfa okkur stundum að fullyrða um ákveðna eiginleika gagnanna.

6.1. Úrtaksdreifing lýsistærðar

Rifjum upp skilgreininguna á lýsistærð í kassa 4.1. Þar stendur að lýsistærð sé tala sem verður reiknuð með einhverjum ákveðnum hætti út frá mælingunum okkar. Nú þegar höfum áttað okkur á að þessar tölur eru í raun útkomur slembistærðar þá er næsta skref að skoða dreifingu þessarar slembistærðar. Hana köllum við *úrtaksdreifingu lýsistærðar* (sampling distribution).

6.1. Úrtaksdreifing lýsistærðar (sampling distribution)

Sérhver lýsistærð er slembistærð og hefur þar af leiðandi einhverja líkindadreifingu. Þá líkindadreifingu köllum við *úrtaksdreifingu lýsistærðarinnar*.

Úrtaksdreifing lýsistærðar er bæði háð stærð úrtaksins sem og líkindadreifingu mælinganna sem notaðar eru til að reikna lýsistærðina, sem einnig er kölluð líkindadreifing þýðisins. Síðar í kaflanum munið þið reyndar sjá að þegar við vinnum með lýsistærðina meðaltal þurfum við ekki að vita líkindadreifingu upphaflegu mælinganna ef fjöldi mælinga í úrtakinu okkar er nógu mikill. Það gefur *höfuðsetning tölfræðinnar* (central limit theorem), mikilvægust allra tölfræðisetninga.

Eins og áður gerum við ráð fyrir að eingöngu sé unnið með *slembiúrtök* og því þurfi ekki að hafa áhyggjur af *úrtaksbjaga*. Ef úrtaksbjagi er til staðar þá hefur hann að sjálfsögðu áhrif á mælingarnar okkar og þar af leiðandi lýsistærðirnar sem við reiknum út frá þeim. Það er hins vegar oft erfitt, ef ekki ómögulegt, að segja til um hvaða áhrif úrtaksbjaginn mun hafa og því munum við ekki ræða þau áhrif frekar. Hins vegar verður góð vísa ekki of oft kveðin: Ef ekki er nægjanlega vel staðið að úrtakshöguninni verður frekari tölfræðiúrvinnsla marklaus.

Lýsistærðin sem leggur saman útkomuna úr tveggja teninga kasti er á margan hátt góð til að kanna úrtaksdreifingu lýsistærðar. Hér fyrir neðan höfum við skrifað möguleg gildi sem lýsistærðin getur tekið í neðstu línuna en þær útkomur úr teningakastinu sem gefa viðeigandi gildi koma beint fyrir ofan gildið.

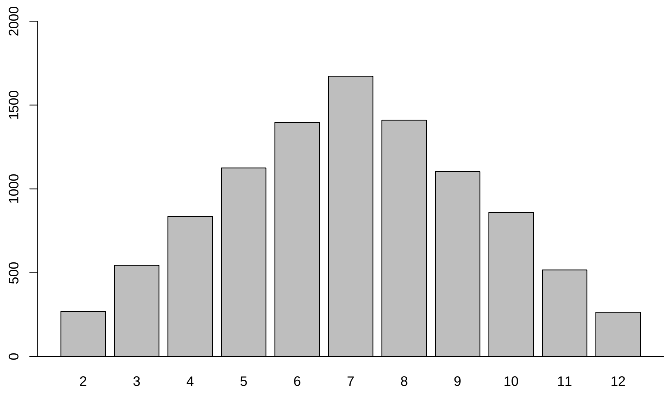
					(6,1)					
				(5,1)	(5,2)	(6,2)				
			(4,1)	(4,2)	(4,3)	(5,3)	(6,3)			
		(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)		
	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	
(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Sérhver útkomanna í teningakastinu hér að ofan er jafnlíkleg en hins vegar gefa mismargar þeirra sömu summuna. Til dæmis gefur einungis útkoman (1,1) gildið 2, en á móti gefa útkomurnar (4,6), (5,5) og (6,4) allar gildið 10. Á mynd 6.1 má sjá útkomu úr hermun á 10000 teningaköstum. Það er engin tilviljun að lögun stuðlaritsins líkist myndinni hér að ofan, það lýsir úrtaksdreifingu lýsistærðarinnar „summa tveggja teninga“.

6.2. Lýsistærðin meðaltal

Þar sem *meðaltal* er bæði ein algengasta lýsistærðin sem við notum og hefur auk þess marga ánægjulega eiginleika, þá ætlum við að skoða hana aðeins nánar.

Hugsum okkur að við viljum kanna sem dæmi meðalþyngd Íslendinga. Við tökum



Mynd 6.1: Hermun á 10000 teningaköstum

slembiúrtak 10 Íslendinga, mælum þyngd hvers og eins og reiknum út frá því meðaltal mælinganna okkar. Hér eru upphaflegu mælingarnar þyngd hvers og eins af Íslendingunum tíu en lýsistærðin sem verður reiknuð er meðaltal þessara 10 mælinga.

Við gætum endurtekið tilraunina og valið upp á nýtt 10 manna slembiúrtak. Þá myndu aðrir 10 einstaklingar veljast í úrtakið og því er sennilegt að meðalþyngd þeirra 10 einstaklinga verði önnur en þeirra 10 sem valdir voru í fyrsta skiptið. Það er, lýsistærðin meðaltal tekur nýtt gildi.

Þar sem við höfum, í þessu dæmi, eingöngu áhuga á því að kanna meðalþyngd Íslendinga þá er þyngd hvers og eins einstaklings ekki áhugaverð, heldur eingöngu meðalþyngd allra viðfangsefnanna. Því viljum við oft vita: Hvaða útkomur myndum við búast við að sjá ef meðaltalið yrði reiknað aftur og aftur fyrir nýtt og nýtt úrtak? Góð leið til að lýsa því er með því að reikna *væntigildi* og *dreifni meðaltalsins*.

Eins og þið vitið þá fæst meðaltal með því að einfaldlega leggja saman útkomur slembistærðar og deila með fjölda mælinga. Þá er gott að hafa eftirfarandi reglur í huga.

6.2. Reiknireglur fyrir væntigildi slembistærða

Ef X og Y eru tvær slembistærðir, þá er

$$E[X+Y] = E[X] + E[Y] \tag{6.1}$$
$$E[X-Y] = E[X] - E[Y] \tag{6.2}$$

Efri jafnan segir að væntigildi af summu tveggja slembistærða sé sú sama og summan af væntigildum slembistærðanna tveggja. Sú neðri segir að væntigildi mismunar tveggja slembistærða sé jafnt mismun væntigilda slembistærðanna tveggja.

6.3. Reiknireglur fyrir dreifni slembistærða
Ef X og Y eru tvær óháðar slembistærðir er

$$Var[X+Y] = Var[X] + Var[Y] \tag{6.3}$$
$$Var[X-Y] = Var[X] + Var[Y] \tag{6.4}$$

Efri jafnan segir að dreifni summu tveggja slembistærða sé jöfn summu dreifni hvorrar slembistærðar fyrir sig. Neðri jafnan segir að dreifni mismunar tveggja slembistærða sé jöfn summu dreifni hvorrar slembistærðar fyrir sig.

Sýnidæmi 6.1: Væntigildi summu tveggja slembistærða
Væntigildi útkomunnar þegar tening er kastað er 3.5 með dreifnina 2.92. Hvert er væntigildi og dreifni summu útkomunnar þegar tveimur teningum er kastað?

Setjum sem svo að X_1 og X_2 séu bæði slembistærðir sem lýsa einföldu teningakasti. Þá er væntigildi summu X_1 og X_2 talan $E[X_1 + X_2]$ sem samkvæmt jöfnu (6.1) er jöfn $E[X_1]$ + $E[X_2]$ sem bæði eru jöfn 3.5. Við fáum því að

$$E[X_1 + X_2] = E[X_1] + E[X_2] = 3.5 + 3.5 = 7.$$

Við getum reiknað dreifni $X_1 + X_2$, eða tvöfalda teningakastsins með jöfnu (6.3):

$$Var[X_1 + X_2] = Var[X_1] + Var[X_2] = 2.92 + 2.92 = 5.84,$$

svo dreifni útkoma úr tvöföldu teningakasti er 5.84.

Þessar reglur má með einföldum hætti útvíkka til að finna væntigildi og dreifni meðaltals.

6.4. Væntigildi og dreifni meðaltals (Expected value and variance of the mean)

Ef $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar og einsdreifðar slembistærðir með væntigildi $E[X_i] = \mu$ og dreifni $Var[X_i] = \sigma^2$ þá gildir um meðaltal þeirra, $\bar{X}$ að:

$$E[\bar{X}] = \mu \tag{6.5}$$

$$Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \tag{6.6}$$

Væntigildi meðaltals er því það sama og væntigildi slembistærðanna sem það er reiknað af en dreifnin minnkar í réttu hlutfalli við fjölda mælinga.

Þar sem lýsistærðin meðaltal er svo mikið notuð hefur staðalfrávik hennar sérstakt heiti, sem kallast *staðalskekkja* (standard error).

6.5. Staðalskekkja (standard error)

Ef $\bar{X}$ er meðaltal $X_1, \ldots, X_n$, óháðra og einsdreifðra slembistærða með dreifni $Var[X_i] = \sigma^2$, þá er *staðalskekkja* þeirra

$$\sigma / \sqrt{n}$$

Hún er staðalfrávik meðaltals mælinganna.

Takið eftir að

$$\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \sqrt{Var[\bar{X}]}$$

svo staðalskekkjan er kvaðratrótin af dreifni meðaltalsins, eins og við er að búast.

Gætið ykkar að í daglegu tali táknar orðið meðaltal yfirleitt tiltekna útkomu, en ekki lýsistærðina meðaltal. Því viljum við ítreka að í þessum kafla á orðið meðaltal við lýsistærðina (og þar af leiðandi slembistærðina) meðaltal. Lýsistærðin meðaltal **mun** verða reiknuð út frá mælingunum okkar, en við vitum ekki enn hverjar mælingarnar okkar verða og þar af leiðandi ekki heldur hver útkoma meðaltals þeirra verður. Rithátturinn er einnig ágætis áminning: Við notum hástafi þegar við ræðum um lýsistærðir en lágstafi þegar við ræðum um útkomur þeirra.

Sýnidæmi 6.2: Væntigildi og dreifni meðaltals
Guðrún Helga er ansi lunkin að brugga hvítvín og á orðið dágott safn af flöskum. Vínið hennar inniheldur að meðaltali 12 % alkóhól, með staðalfrávikið 1.5 %. Næsta laugardag mun hún halda fjölmenna veislu þar sem hún ætlar að bjóða upp á 20 flöskur af víni. Hún hefur hins vegar áhyggjur af því að alkóhólmagnið verði mjög breytilegt eftir flöskum. Því grípur hún til þess ráðs að blanda saman víni úr 20 flöskum og hella í jafnmargar könnur. Finnið væntigildi og dreifni áfengisprósentu könnu sem valin er af handahófi.

Þegar Guðrún blandar öllu víninu saman og hellir aftur í könnur inniheldur sérhver kanna sama vínið, sem er „meðalvín" allra 20 flasknanna. Látum slembistærðina X tákna áfengisprósentu vínsins hennar Guðrúnar en slembistærðina $\bar{X}$ tákna áfengisprósentu meðalvínsins. Vínið hennar Guðrúnar inniheldur að meðaltali 12 % alkóhól, svo $\mu = 0.12$. Notum nú jöfnu (6.5) til að reikna væntigildi áfengisprósentu „meðalvínsins". Væntigildið verður því

$$E[\bar{X}] = \mu = 0.12$$

eða það sama og væntigildi upphaflega vínsins. Meðalvínið er hins vegar búið til úr 20 flöskum af víni með staðalfrávik 1.5 svo $n = 20$ og $\sigma = 1.5$. Notum nú jöfnu (6.6) til að reikna dreifni meðalvínsins. Dreifnin verður þá

$$Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{1.5^2}{20} = 0.1125.$$

Ef við búum svo vel að þýðið okkar sé normaldreift, það er að mælingarnar fylgi sömu normaldreifingunni, þá verður úrtaksdreifing meðaltalsins líka normaldreifð. Meðaltalið verður það sama en staðalskekkjan tekur við hlutverki staðalfráviksins.

6.6. Líkindadreifing meðaltals normaldreifðra slembistærða
Ef $X_1, \ldots, X_n$ eru slembistærðir úr normaldreifingu með væntigildi μ og dreifni σ^2 þá fylgir $\bar{X}$ einnig normaldreifingu, með væntigildi μ og dreifni σ^2/n.

$$\text{Það er ef } X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ þá } \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n). \tag{6.7}$$

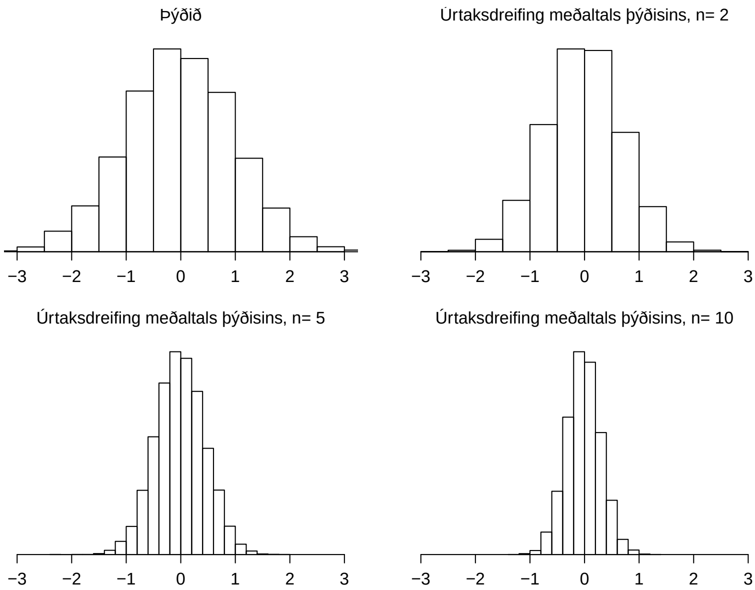
Framkvæmum nú litla tilraun. Búum til þýði sem samanstendur af 10000 mælingum sem fylgja stöðluðu normaldreifingunni. Í efra vinstra horninu á mynd 6.2 má sjá stuðlarit af þýðinu.

Tökum nú 10000 sinnum slembiúrtak af stærð 2 (n=2) úr þýðinu og finnum meðaltal þessara tveggja mælinga. Teiknum svo stuðlarit af þessum 10000 tölum sem hver og ein er útkoma meðaltals tveggja mælinga. Stuðlaritið má sjá í efra hægra horninu á mynd 6.2.

Þetta endurtökum við tvisvar til viðbótar en stækkum nú slembiúrtökin sem við veljum og tökum slembiúrtak af stærð 5 í fyrra skiptið og að lokum slembiúrtök af stærð 10. Stuðlaritin þegar $n = 5$ og $n = 10$ má sjá á neðri helming myndar 6.2.

Séu stuðlaritin skoðuð má sjá að í öllum tilfellum fylgir dreifingin normaldreifingu með meðaltal 0 en dreifnin er ekki sú sama. Hún minnkar eftir því sem stærð slembiúrtakanna stækkar eins og jafna (6.7) segir til um.

Hér sjáum við svart á hvítu hvernig úrtaksdreifing $\bar{X}$ er bæði háð fjölda mælinga (í gegnum n) og dreifingu þýðisins (í gegnum μ og σ).



Mynd 6.2: Úrtaksdreifing meðaltals

Sýnidæmi 6.3: Líkindadreifing meðaltals normaldreifðra slembistærða
Einkunn nemenda í samræmdu könnunarprófi í íslensku er normaldreifð með $\mu = 5$ og $\sigma = 2$. Hver er líkindadreifing meðaleinkunnar 10 nemenda sem valdir eru af handahófi?

Samkvæmt kassa 6.6 er meðaleinkunn 10 nemenda líka normaldreifð með stikana $\mu = 5$ og $\sigma^2/n = 4/10 = 0.4$. Svo meðaleinkunn 10 nemenda fylgir $N(5, 0.4)$.

6.3. Höfuðsetning tölfræðinnar

Nú er komið að sjálfri *höfuðsetningu tölfræðinnar* en hún ber svo sannarlega nafn með rentu og útskýrir í raun hví svo mikil áhersla er lögð á normaldreifingu í tölfræði og líkindafræði. Höfuðsetningin fjallar um úrtaksdreifingu meðaltals og segir að sú úrtaksdreifing verði normaldreifð ef það eru nægjanlega margar mælingar í úrtakinu.

6.7. Höfuðsetning tölfræðinnar (Central limit theorem)

Ef $X_1,\ldots,X_n$ eru óháðar og einsdreifðar slembistærðir þá fylgir $\bar{X}$ normaldreifingu með væntigildi μ og dreifni σ^2/n

$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

óháð dreifingu $X_1,\ldots,X_n$ **ef** n er nógu stórt.

Þetta þýðir að ef við tökum meðaltal nógu margra mælinga þá mun það meðaltal fylgja normaldreifingu sama hver dreifing upprunalegu mælinganna er. Það sem meira er, þá vitum við stika dreifingarinnar. Gætið ykkar að þetta gildir eingöngu ef mælingarnar eru óháðar og fylgja allar sömu dreifingu.

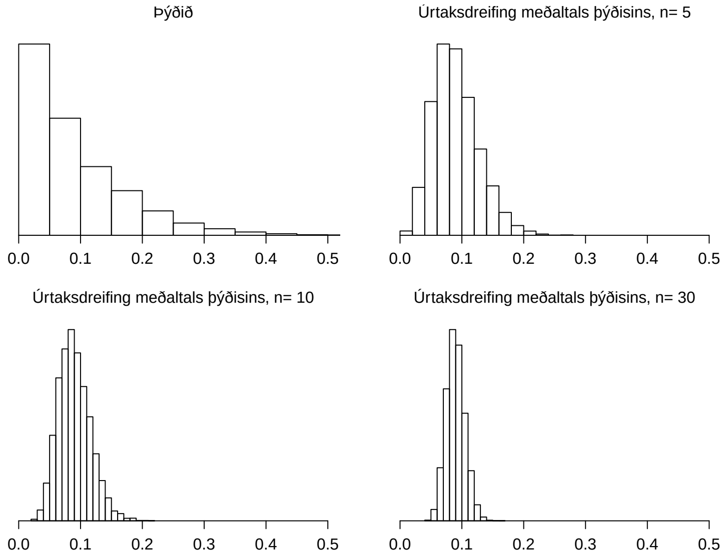
Takið eftir að ef X_i eru normaldreifðar gildir reglan fyrir öll n. Því meira sem dreifing X_i víkur frá normaldreifingu, því stærra n er þörf. Þetta getum við líka orðað sem svo: Ef upprunalegu mælingarnar eru normaldreifðar gildir reglan alltaf, því meira sem upphaflegu mælingarnar víkja frá normaldreifingu, því fleiri mælingar þurfum við til að meðaltal þeirra verði normaldreift.

Þessi eiginleiki er sýndur myndrænt á myndum 6.3 og 6.4. Á myndunum má sjá stuðlarit af þýði og stuðlarit af úrtaksdreifingu meðaltals fyrir $n = 5$, $n = 10$ og $n = 30$. Á mynd 6.3 er dreifing þýðisins mjög skekkt til hægri en þýðið á mynd 6.4 er nær því að fylgja normaldreifingu.

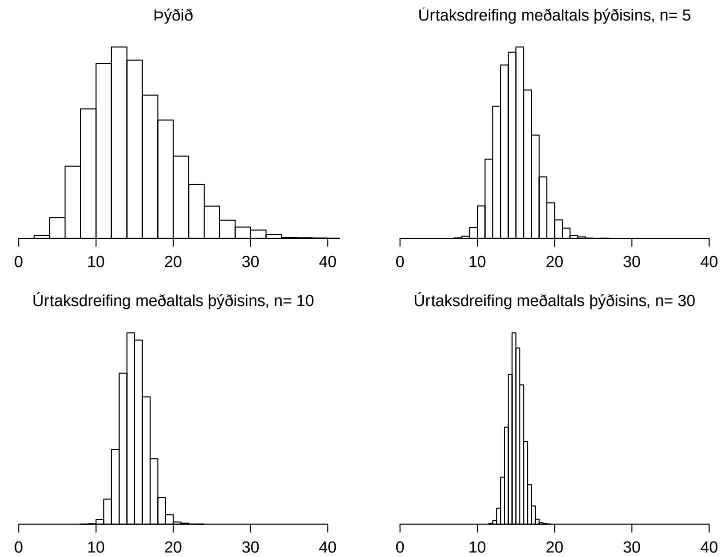
Ágætis viðmið er að fjöldi mælinga, n, sé stærri en 30 en það er ekki algilt. Gætið þess einnig að eins og alltaf þurfa mælingarnar að vera óháðar og einsdreifðar annars getum við ekkert fullyrt!

6.4. Metlar og prófstærðir

Í ályktunartölfræði er aðallega stuðst við tvo flokka af lýsistærðum. Annar flokkurinn inniheldur *metla* en það eru lýsistærðir sem gefa mat á stikum líkindadreifingarinnar sem upphaflegu mælingarnar fylgja. Hinn flokkurinn hefur að geyma *prófstærðir*. Þær notum við til að framkvæma tilgátupróf sem geta mögulega hrakið fullyrðingar um ákveðna eiginleika mælinganna. Tilgátupróf eru betur kynnt til sögunnar í kafla 6.6.



Mynd 6.3: Úrtaksdreifing meðaltals þar sem þýðið fylgir mjög skekktri dreifingu



Mynd 6.4: Úrtaksdreifing meðaltals þar sem þýðið fylgir lítið skekktri dreifingu

Eins og við fjölluðum um í 5. kafla, lítum við svo á að mælingarnar okkar séu útkomur sem slembistærð hefur tekið. Því er líkindadreifing slembistærðarinnar oft kölluð líkindadreifing þýðisins. Í raun vitum við nær aldrei hver sú líkindadreifing er nákvæmlega en við getum oft leyft okkur að áætla að hún sé af tiltekinni gerð.

Við sáum að ef við vitum gerð líkindadreifingar, þá gefa *stikar* dreifingarinnar okkur allar þær upplýsingar sem hægt er að fá um líkindadreifinguna. Þar af leiðandi er öll sú vitneskja sem hægt er að fá um eðli mælinganna fólgin í gildunum á stikunum sem lýsa líkindadreifingu þeirra.

Eitt af verkefnum ályktunartölfræði er að nota mælingarnar okkar til að meta hver gildin á stikum líkindadreifingar þeirra eru. Þær útkomur sem við munum fá þegar við metum gildi stikanna eru háðar mælingunum okkar og geta breyst í hvert sinn sem nýtt úrtak er valið. Þær eru því lýsistærðir og við köllum þær *metla* (estimators).

6.8. Metill (estimator)

Metill er lýsistærð sem metur stika tölfræðilíkans.

Í þessari bók verður fjallað um metla á stikum normaldreifingar, Poisson dreifingar og tvíkostadreifingar. Þeir stikar voru táknaðir með μ, σ, λ og p. Í raun vitum við ekki gildin á þessum stikum, heldur notum metla til að finna þá. Þegar við höfum reiknað gildi metils fyrir eitthvað tiltekið úrtak köllum við útkomuna *mat* (estimate).

Til að skerpa á muninum á sönnu gildi stika annars vegar og matinu á honum hins vegar er sanna gildið táknað með grískum bókstaf en matið á því gildi táknað með latneska stafrófinu. Undantekning á þeirri reglu er þó p og er það vegna þess að gríska p-ið er π sem hefur verið frátekið fyrir töluna π.

Sömuleiðis gætum við þess að tákna metla með stórum staf en útkomur þeirra með litlum staf í samræmi við það að slembistærðir eru táknaðar með stórum staf en útkomur þeirra með litlum. Hér á eftir munum við sjá þrjá metla. Metilinn $\bar{X}$ metur μ eða λ, eftir því sem við á. Útkoma hans er matið $\bar{x}$. Metillinn S^2 metur σ^2 og er matið s^2. Loks metur metilinn P stikann p en þá táknum við matið með $\hat{p}$.

6.9. Metill á meðaltal slembistærðar

Metillinn sem við notum til að meta meðaltal slembistærðar er

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

þar sem n er heildarfjöldi mælinga. $\bar{X}$ er einfaldlega meðaltal allra mælinganna.

Við notum metilinn $\bar{X}$ þegar gögnin fylgja normaldreifingu eða Poisson dreifingu. Í fyrra tilvikinu metur metillinn μ í því seinna metur hann λ. Mötin táknum við með $\bar{x}$.

Sýnidæmi 6.4: Metlar - $\bar{X}$
Það er talið að fjöldi barna sem handleggsbrjóta sig á hverjum degi fylgi Poisson dreifingu. Eggert, læknir á slysadeild, vill meta hversu mörg börn handleggsbrjóta sig að meðaltali á hverjum degi. Hann hefur í höndum fjölda handleggsbrota síðustu 10 daga, en þau reyndust 2, 0, 1, 7, 3, 3, 6, 4, 4, 1. Hvert metur Eggert meðalfjölda handleggsbrota vera á hverjum degi?

Þar sem fjöldi barna sem handleggsbrjóta sig lýtur Poisson dreifingu þá gefur stikinn λ meðalfjölda barna sem brjóta sig á hverjum degi. Metillinn fyrir þann stika er $\bar{X}$, sem er meðaltal mælinganna. Eggert metur því fjöldann

$$\bar{x} = \frac{2+0+1+7+3+3+6+4+4+1}{10} = \frac{31}{10} = 3.1.$$

Hann áætlar því að 3.1 barn handleggsbrjóti sig að meðaltali á dag.

6.10. Metill á dreifni slembistærðar

Metillinn sem við notum til að meta dreifni slembistærðar er

$$S^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

þar sem $\bar{X}$ er metill á meðaltal mælinganna og n er heildarfjöldi mælinga.

Formúluna að ofan reiknum við með eftirfarandi hætti:

1. Fyrst finnum við meðaltal mælinganna.
2. Síðan drögum við hverja mælingu frá meðaltalinu.
3. Þar næst setjum við sérhverja stærð úr lið 2 í annað veldi.
4. Við leggjum saman allar stærðirnar úr lið 3.
5. Að lokum deilum við með n-1.

Við notum metilinn S^2 þegar gögnin lúta normaldreifingu, þá metur hann σ^2. Matið táknum við með s^2.

Sýnidæmi 6.5: Metlar - S^2
Helga telur að skóstærð kvenna sé normaldreifð. Hún ætlar að stofna skóverslun og vill því vita hver dreifnin er á skóstærð kvenna til að meta hversu mikið hún þarf að kaupa af hverju númeri. Hún mælir skóstærð 8 kvenna af handahófi og fær eftirfarandi gildi: 40, 36, 37, 39, 38, 39, 40, 38. Hverja metur hún dreifnina?

Þar sem gögnin lúta normaldreifingu notar Helga metilinn S^2 í kassa 6.10.

1. Meðaltal mælinganna er $\frac{40+36+37+39+38+39+40+38}{8} = 38.375$.
2. Frávik hverrar mælingar frá meðaltalinu er: 1.625, -2.375, -1.375, 0.625, -0.375, 0.625, 1.625, -0.375.
3. Stærðirnar í 2, hafnar í annað veldi eru: 2.641, 5.641, 1.891, 0.391, 0.141, 0.391, 2.641, 0.141.
4. Summa stærðanna í 3 er 13.878.
5. $\frac{13.878}{8-1} = \frac{13.878}{7} = 1.983$

Hún metur því að dreifnin sé $s^2 = 1.983$.

6.11. Metill á hlutfalli slembistærðar
Metillinn sem við notum til að meta hlutfall slembistærðar er

$$P = \frac{X}{n}$$

þar sem X er fjöldi heppnaðra tilrauna og n er heildarfjöldi tilrauna.

Við notum metilinn P þegar gögnin lúta tvíkostadreifingu, þá metur hann p. Matið táknum við með $\hat{p}$.

Sýnidæmi 6.6: Metlar - P
Það er talið að fjöldi skemmdra mandarína í hverjum kassa sem inniheldur 20 mandarínur lúti tvíkostadreifingu. Anna Hera vill tryggja að hún kaupi nægjanlega margar óskemmdar mandarínur og vill því meta hvert hlutfall þeirra skemmdu sé. Hún kaupir kassa með 20 mandarínum, þar af eru 2 skemmdar. Hvert metur hún hlutfallið vera?

Þar sem gögnin eru tvíkostadreifð má nota metilinn P úr kassa 6.11. Hún hefur 20 mandarínur, svo $n = 20$. Tvær þeirra eru skemmdar svo $x = 2$. Hún metur því hlutfallið

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{2}{20} = 0.1.$$

Þ.e. að 10 % mandarína séu skemmdar að meðaltali.

6.5. Öryggisbil

Nú hafið þið séð hvernig við notum metla til að meta hvert gildið á stika þýðis er. Það mat sem við reiknum er hins vegar útkoma lýsistærðar og getur þar af leiðandi breyst ef nýtt úrtak er valið, þó svo að rétta gildið á stikanum sé ávallt það sama. Hversu áreiðanlegt er þá matið okkar? Eru einhverjar líkur á því að við höfum hitt á nákvæmlega rétta gildið? Ef ekki, eru þá ekki önnur gildi líka sennileg?

Hugsum okkur að Arndís og Guðrún Birna vilji báðar meta meðalfjölda lakkrísmynta í hverju boxi. Arndís kaupir 5 box og meðalfjöldi mynta í þeim boxum reyndist vera 34. Mat hennar á meðalfjölda mynta var þá 34. Guðrún Birna kaupir líka 5 box en meðalfjöldi myntanna reyndist 36, hún fékk annað mat. Hvor þeirra hefur þá rétt fyrir sér? Hafa þær kannski báðar rangt fyrir sér?

Í langflestum tilvikum eru engar líkur á því að matið okkar á stika líkindadreifingar sé raunverulega sanna gildið á stikanum. Þess vegna viljum við vita hvaða önnur gildi eru einnig líkleg. Það skiptir ef til vill ekki öllu máli hvort meðalfjöldi lakkrísmynta sé 34 eða 36, en við teljum kannski sennilegt að hann sé „á því reiki“. Til að leggja mat á það hvaða önnur gildi eru sennileg möt á stikunum sem við erum að meta notum við *öryggisbil* (confidence intervals). Öryggisbil mun með ákveðnu *öryggi* (confidence level) innihalda sanna gildið á stikanum sem við erum að reyna að meta.

6.12. Öryggisbil (confidence interval)

1 - α öryggisbil er talnabil sem inniheldur sanna gildi stikans með örygginu 1 - α.

6.13. Öryggi (confidence level)

Öryggi er það hlutfall tilvika þar sem öryggisbilið inniheldur raunverulegt gildi stikans, þegar tilraunin er endurtekin mjög oft.

Ímyndum okkur að hver einasti af þúsund nemendum í tölfræðinámskeiði myndi mæla þyngd 10 karlmanna til að áætla hver meðalþyngd karlmanna á Íslandi væri. Stikinn sem þau vilja meta er raunveruleg meðalþyngd karlmanna á Íslandi. Við vitum ekki hvert gildi hans er. Ímyndum okkur líka að hver einasti nemandi reikni 95 % öryggisbil fyrir stikann. Þá munu um það bil 95 % nemendanna, eða í kringum 950 nemendur, reikna öryggisbil sem inniheldur raunverulega meðalþyngd karlmanna á Íslandi.

6.14. Öryggismörk eða vikmörk (confidence limits)

Öryggismörk eru endapunktar öryggisbilsins. Efra öryggismarkið er efri endapunktur bilsins (stærsta gildið sem er tekið á bilinu) en neðra öryggismarkið er neðri endapunkturinn (minnsta gildið sem er tekið á bilinu).

Alveg eins og við tölum um öryggi þá þurfum við ekki síður að tala um andstæðu þess eða *villulíkurnar*.

6.15. Villulíkur (Type I error)

Villulíkur, táknaðar α, eru það hlutfall tilvika þar sem öryggisbil metilsins inniheldur ekki raunverulega gildið á stikanum sem hann metur, ef tilraunin er endurtekin mjög oft.

Ef við skoðum aftur dæmið að ofan, þá myndum við búast við því að í kringum 5 % nemendanna, eða í kringum 50 nemendur, myndu reikna öryggisbil sem inniheldur ekki raunverulega gildið á stikanum. Algengast er að velja villulíkurnar $\alpha = 0.05$, sem svarar til þess að finna 1- 0.05, eða 0.95 öryggisbil. Athugið að yfirleitt er talað um öryggisbil í prósentum. Þannig segjum við 95 % öryggisbil, í stað 0.95 öryggisbils.

Við viljum ítreka að öryggisbil er alltaf jafn „öruggt”. Það skiptir engu hvað við höfum margar mælingar í úrtakinu okkar, 95% öryggisbil mun alltaf innihalda rétta gildi stikans í 95% tilvika þegar tilraunin er framkvæmd. Hins vegar, eftir því sem við höfum fleiri mælingar í úrtakinu okkar, því þrengra (minna) verður öryggisbil lýsistærðanna sem við erum að meta, þ.e. bilið á milli efri og neðri öryggismarka minnkar. Það er í samræmi við innsæi okkar, eftir því sem úrtakið stækkar, þeim mun meiri vitneskju höfum við um þýðið sem við erum að lýsa.

6.6. Tilgátupróf

Nú erum við búin að sjá hvernig við finnum mat á stika líkindadreifingar mælinganna og öryggisbil fyrir það mat. Þá er kominn tími til að taka næsta skref, að nota mælingarnar til að fullyrða um tiltekna eiginleika þýðisins. Til þess notum við tilgátupróf. Þegar við framkvæmum tilgátupróf stillum við upp tveimur *tilgátum* þar sem önnur er neitun hinnar. Ef gögnin leyfa, hrekjum við aðra tilgátuna og fullyrðum þá um leið hina.

Þegar við framkvæmum tilgátupróf reiðum við okkur á lýsistærðir sem kallast *prófstærðir* og notum útkomur þeirra til að fullyrða um líkindadreifingu þýðisins eða þýðanna sem verið er að skoða. Hér á eftir má sjá stutta samantekt um hugmyndafræði tilgátuprófa. Verkefni kaflans er að útskýra nánar skrefin hér að neðan og þá röksemdafærslu sem þau byggja á.

6.16. Hugmyndafræði tilgátuprófa

Sett er fram ein tilgáta sem lýsir því sem við viljum sýna fram á og önnur sem lýsir hlutlausu tilviki.

Fundin er lýsistærð sem hefur þekkta líkindadreifingu í hlutlausa tilvikinu. Þessi lýsistærð er prófstærðin okkar.

Skilgreint er hvaða gildi á prófstærðinni eru „ósennileg“ miðað við líkindadreifinguna í hlutlausa tilvikinu.

Ef útkoma prófstærðarinnar flokkast sem „ósennileg“ þá höfnum við tilgátunni um hlutlausa ástandið og fullyrðum tilgátuna sem við viljum sýna fram á.

Ef útkoman er ekki „ósennileg“ er ekkert fullyrt.

6.6.1. Tilgátur

Tilgáta er fullyrðing sem við getum fullyrt eða hrakið með gögnunum okkar, eftir því hvert eðli tilgátunnar og útkoma gagnanna eru. Yfirleitt er tilgátan fullyrðing um stika þýðisins eða þýðanna sem gögnin koma úr. Sem dæmi má nefna fullyrðingu um μ, ef breytan er normaldreifð eða fullyrðingu um p ef breytan fylgir tvíkostadreifingu.

Sérhvert tilgátupróf hefur tvær tilgátur, núlltilgátu og gagntilgátu. Þær eru ætíð háðar hvor annarri og eru smíðaðar þannig að gagntilgátan er sú fullyrðing sem gildir ef núlltilgátan er röng.

6.17. Núlltilgáta (null hypothesis)

Núlltilgáta er fullyrðing sem getur verið afsönnuð með fyrirliggjandi gögnum. Hún verður hins vegar aldrei sönnuð. Hún er yfirleitt táknuð með H_0.

Yfirleitt er núlltilgáta fullyrðing um hlutlaust ástand, til dæmis að hópar séu jafnir, að það sé ekki fylgni á milli breyta og svo framvegis. Dæmi um núlltilgátu er: Magn kólesteróls í blóði er það sama hjá einstaklingum sem taka lyf og þeim sem taka lyfleysu.

6.18. Gagntilgáta (alternative hypothesis)

Gagntilgáta er sú fullyrðing sem við viljum staðfesta með rannsókninni. Hún er eingöngu sönnuð en ekki afsönnuð. Hún er ýmist táknuð með H_1 eða H_a.

Dæmi um gagntilgátu er: Magn kólesteróls í blóði er meira hjá einstaklingum sem taka lyf heldur en þeim sem taka lyfleysu.

6.6.2. Áttanir tilgátuprófa

Til eru tvær gerðir tilgátuprófa, *tvíhliða tilgátupróf* (two-sided test) og *einhliða tilgátupróf* (one-sided test). Munurinn á þessum tveimur gerðum tilgátuprófa liggur í eðli gagntilgáta þeirra.

6.19. Einhliða próf (one-sided tests)

Til eru tvær gerðir *einhliða tilgátuprófa*:

Þau sem fullyrða að einn stiki gagnanna sé **stærri** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.

Þau sem fullyrða að einn stiki gagnanna sé **minni** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.

Ímyndum okkur að við höfum eftirfarandi tvær tilgátur:

H_0 Kólesterólmagnið er það **sama** í báðum hópum.

H_1 Kólesterólmagnið er **minna** hjá þeim sem taka lyfið.

Þetta er dæmi um einhliða próf. Gagntilgátan tiltekur að kólesterólmagnið sé **minna** hjá þeim sem taka lyfið.

6.20. Tvíhliða próf (two-sided tests)

Ef gögnin leyfa þá fullyrðir *tvíhliða tilgátupróf* að einn stiki gagnanna sé **annað hvort stærri eða minni** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.

Dæmi um tvíliða tilgátupróf væri:

H_0 Kólesterólmagnið er það **sama** í báðum hópum.

H_1 Kólesterólmagnið er **ekki það sama** í báðum hópum.

Hér gerir gagntilgátan ekki ráð fyrir því að kólesterólmagnið sé minna í hópnum sem tekur lyfið. Munurinn gæti allt eins verið í hina áttina.

Tvíhliða tilgátupróf hafa þann stóra kost fram yfir einhliða tilgátupróf að við þurfum ekki að tilgreina fyrir fram hvort við munum fullyrða að stiki gagnanna sé stærri eða minni en viðmiðið. Þar af leiðandi skal ávallt nota tvíhliða tilgátupróf þegar við teljum að við getum hafnað núlltilgátunni en við erum ekki viss um hvort munurinn sé jákvæður eða neikvæður. Reynist munurinn vera jákvæður getum við fullyrt sem svo og einnig ef hann reynist neikvæður. Í einhliða tilgátuprófi þurfum við að ákveða fyrirfram í hvora átt mismunurinn liggur. Þetta sjáum við betur þegar við skoðum *höfnunarsvæði tilgátuprófa* í kassa 6.23

6.6.3. Prófstærðir

> **6.21. Prófstærð (test statistic)**
>
> *Prófstærð* er lýsistærð sem má nota til að hrekja núlltilgátu, ef gögnin leyfa.

Dæmi um algengar prófstærðir eru $\bar{X}$ (meðaltal) og $\frac{\bar{X}}{S/\sqrt{n}}$ (meðaltal deilt með staðalskekkju). Algengustu tilgátuprófin byggja á prófstærðum sem hafa þekkta líkindadreifingu þegar núlltilgátan er sönn. Í kafla 6.3 gaf sem dæmi Höfuðsetning tölfræðinnar að dreifing $\bar{X}$ líkist normaldreifingu ef nægilega margar mælingar eru í úrtakinu. Á þeim eiginleika byggja nokkur tilgátupróf.

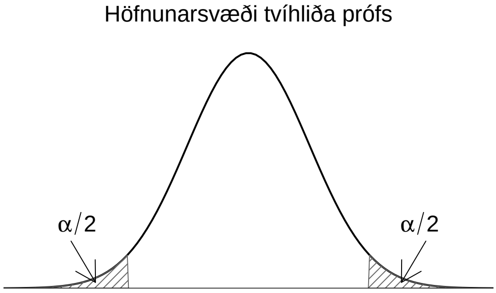
Í þessari bók munu prófstærðinar byggja á samfelldu líkindadreifingunum sem við kynntumst í kafla 5. Við kennum prófstærðinar okkar oft við þær líkindadreifingar sem þær fylgja. Þannig tölum við um z-gildi ef hún fylgir normaldreifingu, t-gildi ef hún fylgir t-dreifingu, F-gildi ef hún fylgir F-dreifingu og χ^2 gildi ef hún fylgir kí-kvaðrat dreifingu. Að sama skapi kennum við tilgátuprófin oft við líkindadreifingu prófstærðanna sem þau byggja á. Þannig er oft talað um t-próf, F-próf og svo framvegis.

6.6.4. Höfnunarsvæði og α-stig

Það að prófstærðir hafi þekkta líkindadreifingu ef núlltilgátan væri sönn gefur okkur valaðferð sem stýrir því hvenær við höfnum núlltilgátunni.

> **6.22. Höfnun núlltilgátu (rejection of null hypothesis)**
>
> Við *höfnum* núlltilgátu ef prófstærðin okkar hefur ósennilegt gildi miðað við þá líkindadreifingu sem hún ætti að hafa ef núlltilgátan væri sönn.

Við segjum að gildi sé ósennilegt ef það lendir annað hvort í öðrum hvorum eða báðum hölum líkindadreifingarinnar. Þau svæði eru kölluð *höfnunarsvæði* tilgátuprófsins.



Mynd 6.5: Höfnunarsvæði tvíhliða prófs

Hversu langt út í halanum höfnunarsvæðið er fer eftir α-*stigi* tilgátuprófsins en hvort hún geti lent í hvorum halanum sem er eða eingöngu öðrum þeirra fer eftir *áttun* tilgátuprófsins. Þessi hugtök eru útskýrð nánar hér á eftir.

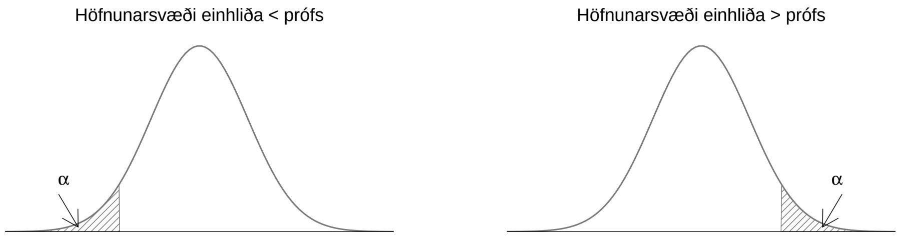
6.23. Höfnunarsvæði tilgátuprófa (rejection areas)

Höfnunarsvæði tilgátuprófa eru nákvæmlega þau bil sem innihalda þau gildi á prófstærðum sem við höfnum núlltilgátunni fyrir.

Ef prófstærðin fellur á höfnunarsvæði tilgátuprófsins þá höfnum við núlltilgátunni og fullyrðum gagntilgátuna.

Ef hún fellur ekki á höfnunarsvæðið, höfnum við ekki núlltilgátunni og drögum enga ályktun.

Höfnunarsvæði tvíhliða og einhliða prófa má sjá á myndum 6.5 og 6.6.



Mynd 6.6: Höfnunarsvæði einhliða prófa

Tölfræðingar þurfa, eins og allir aðrir, að sætta sig við mistök stöku sinnum. Alvarlegustu villurnar sem við gerum eru yfirleitt að fullyrða gagntilgátu, sem er í raun ósönn. Það gerist þegar við höfnum núlltilgátu sem við áttum ekki að hafna. Við viljum stýra því að hlutfall þessara mistaka sé ekki of hátt. Til þess höfum við hugtakið α-*stig* tilgátuprófa.

6.24. α-stig (α-level)

α *stig* tilgátuprófs eru mestu ásættanlegu líkur þess að hafna núlltilgátunni þegar hún er í raun sönn.

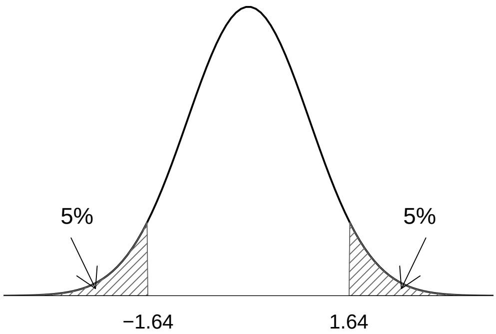
Líkurnar á því að prófstærð falli á höfnunarsvæði þegar núlltilgátan er sönn eru nákvæmlega α-stig tilgátuprófsins. Til að skilgreina höfnunarsvæði þurfum við því að ákveða:

- Hver er stefna tilgátuprófsins? (einhliða/tvíhliða próf)
- Hvað er ásættanlegt α-stig tilgátuprófsins?

Höfnunarsvæði fyrir einhliða próf er eingöngu í öðrum hala líkindadreifingarinnar á meðan höfnunarsvæði tvíhliða prófa dreifist jafnt á báða halana. Þetta veldur því að höfnunarsvæði einhliða prófs er nær meðaltalinu, en þó eingöngu úr annarri áttinni. Það veldur því aftur að einhliða próf getur hafnað núlltilgátu sem tvíhliða próf myndi ekki hafna. Við megum því aldrei taka ákvörðun um að nota einhliða próf eftir að hafa skoðað gögnin. Það veldur því að líkurnar á að hafna réttri núlltilgátu verða meiri en α. Hins vegar kemur það niður á *styrk* prófsins, hugtaki sem þið munuð kynnast í næsta undirkafla, að nota tvíhliða próf þegar rök hefði mátt færa fyrir því að nota einhliða próf.

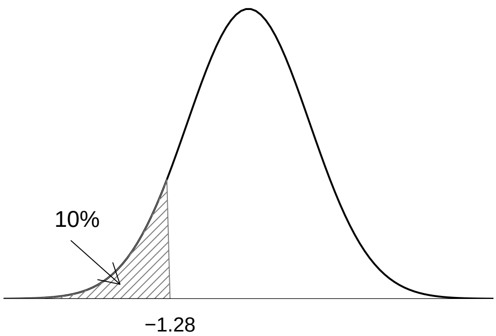
Skoðum lítið dæmi. Baldur framkvæmir tvíhliða tilgátupróf þar sem hann hafnar H_0 ef prófstærðin hans er lítil eða stór. Prófstærðin sem Baldur notar fyrir prófið fylgir staðlaðri normaldreifingu og hann hefur α-stigið 10 %. Baldur skilgreinir því að gildi prófstærðarinnar sé ósennilegt ef það er minna eða jafnt $z_{0.05} = -1.64$ eða stærra eða jafnt $z_{0.95} = 1.64$. Hann segir því að öll gildi sem eru annað hvort minni en -1.64 eða stærri en 1.64 séu ólíkleg. Höfnunarsvæðin má sjá á mynd 6.7. Prófstærð Baldurs hlaut gildið -1.4 í tilrauninni hans. Hann hafnar því ekki tilgátuprófinu og fullyrðir því ekki neitt.

Ímyndum okkur nú að Jóhannes hafi framkvæmt einhliða tilgátupróf með sams konar gögn og sömu prófstærð. Jóhannes skilgreinir því að gildi prófstærðarinnar sé ósennilegt ef það er minna eða jafnt $z_{0.10} = -1.28$. Hann segir því að öll gildi sem eru minni en -1.28 séu ólíkleg. Höfnunarsvæðin má sjá á mynd 6.8. Prófstærð Jóhannesar hlaut gildið -1.4 í tilrauninni hans. Hann hafnar því tilgátuprófinu og fullyrðir H_1. Ef að Jóhannes hafði ekki forsendur til að áætla að að eingöngu lítil gildi væru ósennileg,



Mynd 6.7: Höfnunarsvæði tvíhliða prófs

er allt eins víst að hann hefði fullyrt að eingöngu stór gildi væru ósennileg ef niðurstöðurnar hefðu verið sem svo. Því voru villulíkur hans í raun 20% en ekki 10%, þ.e. tvöfalt líklegra en hann áætlaði að villa af gerð I hafi átt sér stað.



Mynd 6.8: Höfnunarsvæði einhliða prófs

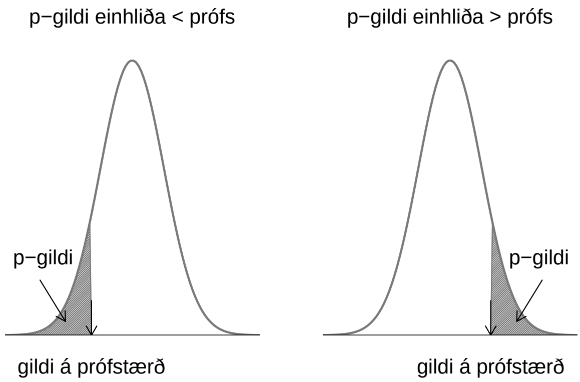
6.6.5. p-gildi

Annað dæmi um lýsistærðir eru p-gildi. p-gildi hafa yfirleitt ekki jafnþekktar líkindadreifingar og aðrar lýsistærðir og oft er æði erfitt eða jafnvel ómögulegt að reikna þau í höndunum. Hins vegar er bæði fljótlegt og auðvelt að túlka p-gildi.

6.25. p-gildi (p-value)

p-gildi eru líkurnar á því að fá jafn ósennilega niðurstöðu eða ósennilegri og fengin er ef núlltilgátan er sönn. Hafna skal H_0 sé p-gildið minna en α. Sé p-gildið stærra en α er ekki hægt að hafna núlltilgátunni.

P-gildið finnum við út frá gildinu á prófstærðinni. Séum við að vinna með einhliða minna en tilgátupróf er p-gildið flatarmálið undir þéttiferlinum frá vinstri hala að gildinu á prófstærðinni. Það er, útkoma dreififallsins í gildinu á prófstærðinni. Séum við aftur á móti að vinna með einhliða stærra en próf er p-gildið flatarmálið frá hægri hala að gildinu á prófstærðinni. Þetta má sjá myndrænt á mynd 6.9. Myndin sýnir p-gildi fyrir prófstærð sem fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Séum við að vinna með tvíhliða tilgátupróf förum við eins að og í einhliða prófunum nema p-gildið er tvöfalt stærra en flatarmálið sem fundið er.



Mynd 6.9: P-gildi einhliða tilgátuprófa þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni

Nær allur tölfræðihugbúnaður reiknar p-gildi í hvert sinn sem tilgátupróf er framkvæmt, enda er túlkun þeirra einföld og skýr, sama hvert tölfræðiprófið er. Því birtum við nánast án undantekningar p-gildi þegar við reiknum tilgátupróf í tölvum. Þegar við reiknum í höndunum reiðum við okkur hins vegar á útkomur prófstærðanna sjálfra, enda oft ómögulegt að finna p-gildin. Í þessari bók er reglan sú að við getum reiknað p-gildi með einföldum hætti ef prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni, annars ekki.

6.26. p-gildi prófstærða sem fylgja stöðluðu normaldreifingunni
Áður en p-gildið er fundið þurfum við að reikna út gildið á prófstærðinni og átta okkur á hvort við séum að vinna með einhliða eða tvíhliða próf.

Einhliða minna en próf:
Við leitum að gildinu á prófstærðinni í z-dálkinum í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260 - 263. P-gildið er jafnt gildinu í $\Phi(z)$-dálkinum því á hægri hlið.

Einhliða stærra en próf:
Við leitum að gildinu á prófstærðinni í z-dálkinum í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260 - 263 og lesum gildið úr $\Phi(z)$-dálkinum því á hægri hlið. P-gildið er jafnt $1-\Phi(z)$.

Tvíhliða próf:
Sé gildið á prófstærðinni okkar neikvætt förum við eins að og þegar við vinnum með einhliða minna en próf en við þurfum að margfalda gildið með 2.
Sé gildið á prófstærðinni okkar jákvætt förum við eins að og þegar við vinnum með einhliða stærra en próf en við þurfum að margfalda gildið með 2.

Sýnidæmi 6.7: P-gildi prófstærðar sem fylgir stöðluðu normaldreifingunni
Finnið p-gildi eftirfarandi tilgátuprófa og segið til um hvort hafna megi núlltilgátunni ($\alpha = 0.05$).

a) Einhliða stærra en tilgátupróf þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Gildið á prófstærðinni er 2.09.
b) Tvíhliða tilgátupróf þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Gildið á prófstærðinni er -1.55.

Við förum eftir leiðbeiningunum í kassa 6.26

a) Við finnum 2.09 í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260 - 263. $\Phi(z)$-gildið því á hægri hlið er 0.9817. Þar sem við erum að vinna með einhliða stærra en próf er p-gildið = 1 - 0.9817 = 0.0183. P-gildið er minna en α svo við höfnum núlltilgátunni.
b) Við finnum -1.55 í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260 - 263. $\Phi(z)$-gildið því á hægri hlið er 0.0606. Þar sem við erum að vinna með tvíhliða tilgátupróf þar sem gildið á prófstærðinni er jákvætt er p-gildið = $2 \cdot 0.0606$ = 0.1212. P-gildið er stærra en α svo við getum ekki hafnað núlltilgátunni.

6.6.6. Styrkur prófa og villur af gerð I og II

6.27. Styrkur (power)

Styrkur tilgáteprófs eru líkurnar á því að hafna núlltilgátu sem er í raun ósönn. Hann er oft táknaður með $1-\beta$

Það getur verið ansi snúið að reikna styrk ýmissa prófa og stundum verðum við að láta gróft mat nægja. Þó gilda ætíð tvær meginreglur. Annars vegar að eftir því sem breytileiki mælinganna sem tilgátuprófið byggir á eykst, þá minnkar styrkurinn. Hins vegar að með auknum fjölda endurtekninga, þá eykst styrkurinn. Við höfum engar leiðir til að minnka breytileika gagnanna, en hins vegar getum við aukið úrtaksstærðina. Mat á styrk er þannig oft notað til að ákvarða hversu margar mælingar þarf að framkvæma í tilraun, þ.e. gerðar eru nægjanlega margar mælingar til að tryggja að ákveðnum styrk sé náð.

Nú þegar við vitum bæði hvað α-stig og styrkur eru, getum við fjallað um þær tvær gerðir villa sem við getum gert þegar við framkvæmum tilgátupróf.

6.28. Villa af gerð I (Type I Error)

Villa af gerð I er sú villa að hafna núlltilgátu sem er í raun sönn. Líkurnar á villu af gerð I eru α-stig prófsins.

6.29. Villa af gerð II (type II error)

Villa af gerð II er sú villa að hafna ekki núlltilgátu sem er í raun ósönn. Líkurnar á villu af gerð II eru β, þar sem $1-\beta$ er styrkur prófsins.

	H_0 er sönn	H_0 er röng
Hafna H_0	Villa af gerð I Líkur: α	Rétt ályktun Líkur: $1-\beta$
Hafna ekki H_0	Rétt ályktun Líkur: 1-α	Villa af gerð II Líkur: β

Athugið að þegar við höfnum ekki tilgátuprófi drögum við yfirleitt enga ályktun. Það geta margvíslegar ástæður legið að baki því að tilgátuprófi er ekki hafnað:

- Fjöldi mælinga var of lítill og þar af leiðandi hafði prófið lítinn styrk.
- Núlltilgátan er í raun sönn.
- Líkanið okkar hæfir ekki gögnunum - þær forsendur sem við gerum ráð fyrir að gögnin uppfylli standast ekki.

Við megum aldrei fullyrða hvert ofangreindra atriða er ástæðan! Við megum þó færa rök fyrir því að ein ofangreindra ástæða sé sú sennilegasta.

Skoðum annað lítið dæmi. Brynhildur og Hóffý Lára kanna báðar hvort það sé samband á milli súkkulaðineyslu og frjósemi kvenna. Þær safna báðar gögnum á sama hátt og framkvæma sams konar tilgátupróf. Brynhildur safnaði 50 mælingum, en Hóffý Lára 40.

- Brynhildur fær p-gildið 0.045 og dregur þá ályktun að samband sé á milli súkkulaðineyslu og frjósemi kvenna.
- Hóffý Lára fær p-gildið 0.055 og dregur enga ályktun.

Hvernig getur staðið á þessu? Ein líkleg skýring er sú að Hóffý Lára var með færri mælingar en Brynhildur og hafði því ekki nægan styrk til að sýna fram á sambandið.

6.6.7. Framkvæmd tilgátuprófa

Við ljúkum kaflanum með því að sýna, í réttri röð, þau skref sem þarf að taka þegar tilgátupróf eru framkvæmd og rifja upp um leið hvað felst í þeim skrefum.

6.30. Framkvæmd tilgátuprófa

1 Ákveða hvaða tilgátupróf er viðeigandi fyrir gögnin okkar.

2 Ákveða hæstu ásættanlegu villulíkur.

3 Setja fram núlltilgátu og ákveða um leið áttun prófsins (einhliða/tvíhliða).

4 Reikna prófstærðina sem svarar til tilgátuprófsins.

5a Kanna hvort prófstærðin falli á höfnunarsvæði tilgátuprófsins.

5b Kanna p-gildi tilgátuprófsins.

6 Draga ályktun.

1 Ákveða hvaða tilgátupróf er viðeigandi fyrir gögnin okkar.

Fyrsta skrefið sem við tökum þegar við framkvæmum tilgátupróf er jafnframt það mikilvægasta. Það er til sægur af alls kyns tilgátuprófum sem hægt er að nota til að svara nánast hvaða tölfræðilegu spurningum sem er. Til að velja rétt tilgátupróf þurfum við að svara tveimur spurningum:

1. Prófar tilgátuprófið þá tilgátu sem við viljum að það prófi? Með öðrum orðum, svarar tilgátuprófið þeirri spurningu sem við viljum fá svar við?

   Sérhvert tilgátupróf prófar tilgátur af ákveðinni gerð. Sum fjalla um meðaltöl, önnur um dreifni og svo mætti lengi telja. Í þessari bók er þetta spurning um að gæta þess að við séum að skoða tilgátupróf í réttum kafla.

2. Uppfylla gögnin okkar þær forsendur sem tilgátuprófið krefst?

   Sérhvert tilgátupróf krefst þess að gögnin sem þeim er beitt á uppfylli ákveðin skilyrði. Þessi skilyrði geta náð allt frá óhæði og einsdreifni mælinga, til krafna um að dreifni sé jöfn í tveimur hópum sem verið er að bera saman, svo einhver dæmi séu nefnd. Í þessari bók snýst þetta um að velja rétt tilvik innan kaflans sem við erum að skoða.

2 Ákveða hæstu ásættanlegu villulíkur.

Það er eilítið misjafnt eftir fagsviðum hvaða α-stigs er krafist, en algengast er að miða við 0.05.

3 Setja fram núlltilgátu og ákveða um leið áttun prófsins (einhliða/tvíhliða).

Þetta skref getur að sama skapi verið vandasamt. Hér þurfum við líkt og í fyrsta skrefinu að gæta þess að tilgátuprófið muni svara þeirri spurningu sem við viljum að það svari. Viljum við sem dæmi fullyrða um að meðaltal eins hóps sé stærra en annars og hvors hópsins þá? Eða nægir okkur að fullyrða að meðaltölin séu ólík?

4 Reikna prófstærðina sem svarar til tilgátuprófsins.

Þetta getum við oft gert í höndunum, en stundum eru prófstærðirnar það flóknar að það er lítið vit annað en að reikna þær í tölvu. Ef við reiknum prófstærðina í höndunum förum við næst í skref 5a, annars í skref 5b.

5a Kanna hvort prófstærðin falli á höfnunarsvæði tilgátuprófsins.

Ef prófstærðin fellur á höfnunarsvæðið, þá höfnum við. Ef hún er fyrir utan það, höfnum við ekki.

5b Kanna p-gildi tilgátuprófsins.

Ef p-gildið er minna en α, þá höfnum við. Annars ekki. Svo einfalt er það!

6 Draga ályktun.

Höfnum við núlltilgátunni og fullyrðum gagntilgátuna? Eða getum við ekkert fullyrt?

6.6.8. Samband öryggisbila og tilgáturprófa

Að lokum viljum við benda á samspil öryggisbila og tilgátuprófa. Það er engin tilviljun að við notum bókstafinn α bæði þegar við tölum um tilgátupróf og öryggisbil. Í næstu köflum munum við oftar en ekki sjá aðferðir til að reikna bæði öryggisbil fyrir ákveðnar lýsistærðir sem og tilgátupróf sem kanna tilgátur um þessar sömu lýsistærðir. Þá mun reglan vera sú að ef gildið á α er það sama fyrir bæði öryggisbilið og tilgátuprófið þá **höfnum** við núlltilgátunni um að tiltekin lýsistærð hljóti ákveðið gildi ef og aðeins ef öryggisbilið sem við reiknum fyrir lýsistærðina inniheldur **ekki** það gildi.

Ef við framkvæmum, sem dæmi, tilgátupróf með 5% villulíkur og reiknum 95% öryggisbil þá höfnum við núlltilgátunni að lýsistærðin sé jöfn tölunni 1 ef talan 1 lendir ekki í öryggisbilinu og sömuleiðis lendir talan 1 ekki í öryggisbilinu ef við höfnum núlltilgátunni að lýsistærðin sé jöfn tölunni 1.

Fyrir öll helstu hefðbundu tilgátuprófin lýsir núlltilgátan hlutlausu ástandi, eins og t.d. að ekki sé munur á meðaltali tveggja hópa. Ef markmið okkar er að *álykta* að raunin sé sú, þá má ekki byggja þá ályktun á því að núlltilgátunni hafi ekki verið hafnað, því ástæða þess gæti verið lítill styrkur, en ekki að meðaltölin séu í raun svipuð. Hins vegar getum við reiknað öryggisbil fyrir mismuninn og skoðað hversu langt öryggismörkin víkja frá núlli. Ef öryggisbilið liggur þröngt um gildið núll getum við réttilega ályktað að munur meðaltalanna sé ekki verið meiri en efri- eða neðri mörk öryggisbilsins (hvort heldur sem víkur lengra frá núllinu). Á þessari hugmyndafræði byggja *sístverripróf* (e. non-inferiority tests) og *jafngildispróf* (e. equivalence tests) sem eru utan efnis þessarar bókar en mikið notuð í lyfjarannsóknum.

Dæmi

Dæmi 6.1
Ef að væntigildi slembistærðarinnar X er 3 og væntigildi slembistærðarinnar Y er -2, hvað er þá væntigildi lýsistærðarinnar $X+Y$?

Dæmi 6.2
Gerum ráð fyrir að þyngd kjúklingabringna frá kjúklingabúinu Kjúlla sé normaldreifð með meðaltal 200 grömm og staðalfrávik 30 grömm. Kolbeinn kokkur rekur veitingahús hér í bæ þar sem gómsætur kjúklingabringuréttur eru á matseðlinum. Kjúklingabringuréttur Kolbeins samanstendur af einni kjúklingabringu og ýmsu meðlæti. Kolbeinn pantar alltaf kjúklingabringur frá Kjúlla.

a) Sé pantaður kjúklingabringuréttur hjá Kolbeini, hvaða dreifingu fylgir þyngd kjúklingabringunnar og hvert er gildið á stikum þeirrar dreifingar?

b) Kolbeinn fær dag hvern sendar 100 kjúklingabringur frá Kjúlla sem valdar hafa verið að handahófi. Hvaða dreifingu fylgir meðalþyngd bringna í hverri sendingu (sem inniheldur 100 bringur) og hvert er gildið á stikum þeirrar dreifingar?

c) Vinsælasti eftirrétturinn á matseðlinum hjá Kolbeini eru bláber með sykri og rjóma. Bláberin eru dýr í innkaupum og leggur Kolbeinn mikið upp úr því að hver réttur innihaldi 40 bláber, hvorki meira né minna. Kolbeinn veit að hvert bláber er að meðaltali 3 grömm af þyngd og hefur staðalfrávikið 1 gramm en hann hefur engar frekari upplýsingar um þyngdardreifingu berjanna. Lítum nú á bláberjarétt sem slembiúrtak bláberja af stærð 40. Hvað er hægt að segja um dreifingu meðalþyngdar bláberja í hverjum rétti (sem inniheldur 40 bláber). Rökstyðjið svar ykkar.

Dæmi 6.3
Lási lögga hefur undanfarið verið að kanna meðalfjölda farþega í bifreiðum sem aka eftir Suðurgötunni. Hann mælir farþegafjöldann nokkra handahófsvalda daga í nóvember en hefur það fyrir reglu að stöðva ætíð nákvæmlega 40 bíla hvern mælingadag. Að meðaltali reynast 1.2 farþegar í hverjum bíl. Hvaða líkindadreifingu er eðlilegt að áætla að meðalfarþegafjöldinn sem Lási mælir á hverjum mælingadegi fylgi? (Ábending: Hugsið fyrst um hvaða líkindadreifingu er eðlilegt að áætla að farþegafjöldi í bílum fylgi. Hér er ekki einungis átt við fólksbíla.)

Dæmi 6.4
Sé barn valið af handahófi er magn tómatsósu sem það kýs að setja út á spaghettíið sitt normaldreift, með stikana $\mu = 15\text{ml}$ og $\sigma^2 = 9\text{ml}^2$. Nenni níski hefur þróað nýja tómatsósuuppskrift og hefur valið 25 börn af handahófi til að setja tómatsósuna út á staðlaðan spaghettískammt og gefa umsagnir um bragðgæðin. Nenna er mikið í mun um að vita sem nákvæmast hvað þessi 25 börn munu nota mikla tómatsósu að meðaltali svo sem minnst sósa fari til spillis. Hvaða líkindadreifingu fylgir meðaltómatsósunotkun þessara 25 barna og hver eru gildi stika hennar?

Dæmi 6.5
Bruggverksmiðja á Suðurlandi er mikið í mun að hafa sem stöðugast áfengisinnihald í bjórnum sem hún bruggar. Alls er bjórinn látinn gerjast í 8 jafnstórum gerjunarkerjum en að gerjun lokinni er öllum bjórnum blandað saman og tappað á flöskur. Vitað er að bjórinn í hverju gerjunarkeri hefur að meðaltali áfengisprósentuna 5.4 % með staðalfrávikið 1 %.

a) Hver má búast við að áfengisprósentan í hverri og einni flösku verði að meðaltali?

b) Hvert er staðalfrávik áfengisprósentu bjórsins sem er tappað á flöskurnar?

Dæmi 6.6
Gefum okkur að hæð íslenskra karlmanna sé normaldreifð með væntigildið 180 cm og staðalfrávikið 10 cm. Steinar mælir 10 karlmenn af handahófi og finnur meðaltal þeirra mælinga.

a) Hvert er væntigildið á meðaltalinu sem hann reiknar?

b) Hver er dreifnin á meðaltalinu sem hann reiknar?

c) Hver er staðalskekkja meðaltalsins sem hann reiknar?

d) Hver er líkindadreifing meðaltalsins sem hann reiknar?

Dæmi 6.7
Hugsum okkur að magn fisks sem einstaklingar torga í einni kvöldmáltíð sé normaldreift með væntigildið 200 gr. og staðalfrávik 50 gr. Bergsteinn Ólafur býður 6 manns í mat. Hver er líkindadreifing á meðalmagni fisksneyslu þessara 6 einstaklinga.

Dæmi 6.8
Bensíneyðsla leigubíla á ónefndri leigubílastöð fylgir normaldreifingu með meðaltalið 15 lítrar/100km og staðalfrávikið 5 lítrar/100km. Nonni hressi velur 12 leigubíla af stöðinni af handahófi og kannar hver meðaleyðsla þessara 12 bíla er.

a) Hver er líkindadreifing meðaleyðslu bílanna 12?

b) Hver er staðalskekkja meðaleyðslunnar?

Dæmi 6.9
Vísindamenn nokkrir framkvæmdu tilgátupróf og út kom p-gildi sem var 0.23. Þeir ákváðu að hæstu ásættanlegu villulíkurnar væru 5%.

a) Hverjar eru líkurnar á að þeir hafni núlltilgátunni sé hún í raun sönn?

b) Geta vísindamennirnir hafnað núlltilgátunni?

Dæmi 6.10
Láki ætlar að finna 90% öryggisbil fyrir meðaltal þýðis. Hverjar eru villulíkurnar?

Dæmi 6.11
Vísindamenn voru að kanna hvort munur sé á meðalþyngd karlkyns og kvenkyns antilópa og ákváðu þeir að hæstu ásættanlegu villulíkurnar væru 5%. Þeir framkvæmdu viðeigandi tilgátupróf og fengu að p-gildið væri 0.007. Geta vísindamennirnir ályktað að munur sé á meðalþyngd karlkyns og kvenkyns antilópa?

Dæmi 6.12
Jarþrúður jarðfræðingur er að kanna muninn á meðallandsigi á tveimur stöðum á Norðurlandi. Hún framkvæmdi tilgátupróf og fékk p-gildi = 0.012. Jarþrúður ætlar að nota $\alpha = 0.05$. Hver af eftirfarandi fullyrðingunum er sönn?

a) Líkurnar á að núlltilgáta Jarþrúðar sé sönn eru 0.012.

b) Líkurnar á að Jarþrúður hafni ekki núlltilgátu sem er röng eru 0.05.

c) Líkurnar á að Jarþrúður hafni núlltilgátu sem er sönn eru 0.012.

d) Engin af fullyrðingunum hér að ofan er sönn.

Dæmi 6.13
Palli og Jói vilja báðir meta meðalfiskneyslu Íslendinga. Palli hringir í 100 manns og innir þá eftir því hversu oft í viku þeir borði fisk og reiknar út frá því 90 % öryggisbil fyrir meðalfiskneyslu Íslendinga. Jói framkvæmir sömu athöfn, nema hann hringir í eingöngu 40 manns. Hver verður helsti munurinn á öryggisbilunum sem Jói og Palli reikna?

Dæmi 6.14
Þjóðhildur framkvæmir tvíhliða tilgátupróf þar sem hún kannar hvort meðaleyðsla þjóðarinnar hafi haldist óbreytt milli áranna 2005 og 2011. Hún framkvæmir tvíhliða tilgátupróf og fær p-gildið 0.08.

a) Hvaða ályktun dregur Þjóðhildur ef hún sættir sig við 5 % villulíkur?

b) Hvaða ályktun dregur Þjóðhildur ef hún sættir sig við 10% villulíkur?

Dæmi 6.15
Ragnar telur að umferð um Suðurgötuna sé meiri í mars en í apríl. Hann framkvæmir því litla könnun þar sem hann telur fjölda bíla sem aka eftir götunni nokkra handahófsvalda daga í hvorum mánuði. Hann framkvæmir lítið tilgátupróf þar sem núlltilgátan er að umferðin sé óbreytt. Tilgátuprófið gefur honum p-gildið 0.04.

a) Hvaða ályktun dregur Ragnar ef hann sættir sig við 5 % villulíkur?

b) Hvaða ályktun dregur Ragnar ef hann sættir sig við 10% villulíkur?

c) Nú kemur í ljós að vegagerðin hefur staðsett sjálfvirka teljara við Suðurgötuna sem sýna að umferðin hefur í raun ekki minnkað heldur aukist lítillega. Hvers konar villa átti sér stað þegar Ragnar framkvæmti tilgátuprófið sitt?

Dæmi 6.16
Regluleg laun á almennum vinnumarkaði voru 334 þúsund krónur að meðaltali á mánuði árið 2009. 200 manna bekkur kannar mánaðarlaun 25 handahófsvalinna einstaklinga það árið og reiknar 95 % öryggisbil fyrir meðallaunin.

a) Hvað má búast við því að um það bil margir nemendur muni reikna öryggisbil sem inniheldur ekki töluna 334 þúsund?

b) Hvað má búast við því að um það bil margir nemendur muni reikna 95 % öryggisbil sem inniheldur ekki töluna 334 þúsund, ef hver nemandi myndi kanna mánaðarlaun 500 einstaklinga?

c) En ef 95 % öryggisbil væri reiknað þar sem hver nemandi kannar eingöngu 5 einstaklinga?

Dæmi 6.17
Egill kannar hvort það vatnsmagn í Þjórsá hafi aukist frá árinu 2000 til ársins 2010. Hann hefur reglubundnar mælingar frá hvoru ári og reiknar út frá þeim öryggisbil fyrir mismun vatnsmagnsins milli áranna. Að meðaltali er mismunur vatnsmagnsins 0.9 metrar með 95 % öryggisbilið [-0.3m, 1.5m].

a) Mun Egill geta hafnað núlltilgátunni að vatnsmagnið sé óbreytt milli ára með 5 % villulíkum?

b) Mun hann geta hafnað sömu núlltilgátu með 1 % villulíkum?

c) Getum við, út frá þessum upplýsingum, fullyrt um hvort hann geti hafnað núlltilgátunni með 10 % villulíkum?

Dæmi 6.18
Finnið p-gildi eftirfarandi tilgátuprófa og segið til um hvort hafna megi núlltilgátunni ($\alpha = 0.05$).

a) Einhliða stærra en tilgátupróf þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Gildið á prófstærðinni er 1.05.

b) Einhliða minna en tilgátupróf þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Gildið á prófstærðinni er -1.99.

c) Tvíhliða tilgátupróf þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Gildið á prófstærðinni er -2.12.

d) Tvíhliða tilgátupróf þar sem prófstærðin fylgir stöðluðu normaldreifingunni. Gildið á prófstærðinni er 1.35.

7. kafli

Ályktanir um flokkabreytur

Nú er komið að því að beita ályktunartölfræði á breyturnar okkar. Við byrjum á því að skoða *álykanir um flokkabreytur* sem er umfjöllunarefni þessa kafla. Eins og við nefndum í kafla 2.2, þá segja útkomur flokkabreyta til um það hvaða flokki mælingarnar okkar tilheyra og eru því ekki mældar í neinum tilteknum einingum. Það er því merkingarlaust að tala um meðaltöl og staðalfrávik þegar unnið er með flokkabreytur. Hins vegar getum við unnið með *hlutföll* (e. proportions), það er við getum kannað hversu hátt hlutfall mælinganna lenti í tilteknum flokki.

Í kafla 7.1 byrjum við á að skoða tilgátupróf og öryggisbil fyrir *eitt hlutfall*, með öðrum orðum skoðum við hversu hátt hlutfall viðfangsefna þýðisins hefur tiltekið gildi flokkabreytu. Þar á eftir, í kafla 7.2, könnum við hvernig bera má saman *hlutföll tveggja þýða*. Þá skoðum við hlutfall mælinga sem hljóta tiltekið gildi flokkabreytu í einu þýði og berum saman við hlutfallið í hinu þýðinu. Í kafla 7.3 munum við sjá hvernig hægt er að útvíkka aðferðina til að skoða fleiri en tvö þýði. Loks í kafla 7.4 kynnumst við svo tilgátuprófum fyrir svokallaðar tengslatöflur sem notuð eru til að kanna hvort samband sé milli tveggja flokkabreyta sem eru þá mældar á sama þýðinu.

Eins og áður gerum við ráð fyrir að þýðið skiptist með einhverjum ákveðnum hætti og innihaldi því einhver raunveruleg hlutföll. Aðferðirnar okkar miðast að því að draga ályktanir um og meta hver þessi hlutföll eru.

7.1. Ályktanir um hlutfall þýðis

Í þessum hluta munum við skoða bilmat og tilgátupróf fyrir eitt hlutfall, p, sem lýsir því hversu hátt hlutfall mælinga tekur eitt ákveðið gildi flokkabreytu. Sem dæmi má nefna skoðanakönnum þar sem fólk er spurt „styður þú ríkisstjórnina? “ Hlutfallið sem við skoðum er það hlutfall viðfangsefna sem svarar spurningunni játandi. Markmið rannsókna af þessu tagi er oftar en ekki að draga ályktanir um hlutfall alls þýðisins, p, sem við ekki þekkjum. Í þessu dæmi væri það að kanna hversu hátt hlutfall allra kjósanda styður ríkisstjórnina.

Útkomur mælinganna sem framkvæmdar eru á úrtakinu eru notaðar til að finna mat á óþekkta hlutfallinu og notum við $\hat{p}$ (lesið p -hatt) til að tákna það mat. Við metum þýðishlutfallið p, með úrtakshlutfallinu, það er

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \tag{7.1}$$

þar sem x er fjöldi þeirra mælinga sem hljóta viðkomandi útkomu („já“ í dæminu hér að ofan) og n er stærð úrtaksins.

Tilgátuprófið í þessum hluta prófar núlltilgátuna hvort hlutfall þýðisins, p, séu jafnt einhverju ákveðnu gildi sem við köllum p_0. Núlltilgátuna ritum við $H_0 : p = p_0$.

7.1.1. Normalnálgun

Þegar við skoðum hvort flokkabreyta tekur ákveðið tiltekið gildi, getum litið á sérhverja mælingu sem Bernoulli tilraun (sjá kassa 5.20 í kafla 5.3.3). Ef mælingin hlýtur tiltekið gildi flokkabreytunnar lítum við á hana sem „heppnaða tilraun“, annars ekki. Mögulegar útkomur eru eingöngu tvær (í hópnum eða ekki), með sömu líkur í hvert sinn og þar sem við gerum alltaf þá kröfu að mælingarnar séu óháðar og einsdreifðar má líta á þær sem röð óháðra tilrauna.

Þar sem við getum litið á hverja mælingu sem Bernoulli tilraun getum við sömuleiðis litið svo á að heildarfjöldi heppnaðra tilrauna fylgi tvíkostadreifingunni (sjá kassa 5.3.3 í kafla 5.3.3). Þá er stikinn p hlutfallið í dreifingunni og n er heildarfjöldi mælinga. Því er hægt að nota aðferðir byggðar á tvíkostadreifingunni til að álykta um p. Þær aðferðir eru hins vegar það stærðfræðilega erfiðar að ekki er unnt að reikna þær í höndunum.

Þegar ákveðnum skilyrðum er uppfyllt líkist tvíkostadreifingin normaldreifingunni nægjanlega mikið til að hægt sé að beita aðferðum sem byggðar eru á eiginleikum normaldreifingarinnar til að draga ályktanir um slembistærðir sem í raun fylgja tvíkostadreifingu. Það köllum við að beita *normalnálgun*. Í þessum kafla munum við aðallega styðjast við aðferðir sem byggja á þeirri nálgun.

Tilgátuprófið í þessum hluta byggir á normalnálgun. Við munum notast við þumalputtaregluna að séu $n\hat{p}$ og $n(1-\hat{p})$ stærri en 15 má nota nálgunina. Það er ætíð mikilvægt að gæta þess að þessi skilyrði séu uppfyllt. Ef skilyrðin eru ekki uppfyllt má nota tilgátupróf sem byggir beint á tvíkostadreifingunni, eða þá *endurvalsaðferð* til að meta tilgátuprófið. Hvoruga aðferðina má reikna í höndunum en þær eru útfærðar í öllum helstu tölfræðihugbúnuðum.

7.1.2. Öryggisbil og tilgátupróf

7.1. Öryggisbil fyrir hlutfall þýðis
Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt, það er ef $n\hat{p}$ og $n(1-\hat{p})$ eru stærri en 15 má reikna neðra öryggismark fyrir p með:

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{7.2}$$

og efra öryggismarkið með

$$\hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{7.3}$$

þar sem $\hat{p} = \frac{x}{n}$ og $z_{1-\alpha/2}$ fæst með að fletta upp í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260-263.

Öryggisbilið má því skrifa sem

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \; < \; p \; < \; \hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \tag{7.4}$$

7.2. Tilgátupróf fyrir hlutfall þýðis
Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt, þ.e.a.s ef $n\hat{p}$ og $n(1-\hat{p})$ eru stærri en 15 má nota eftirfarandi tilgátupróf.

Núlltilgátan er:

$$\mathrm{H}_0 : p = p_0$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{X - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} \tag{7.5}$$

þar sem X er fjöldi heppnaðra tilrauna og n er stærð úrtaksins.

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0,1)$. Gagntilgátan getur verið einhliða eða tvíhliða og má sjá þær ásamt höfnunarsvæðunum hér að neðan.

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : p < p_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : p > p_0$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : p \neq p_0$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Sýnidæmi 7.1: Ályktanir um hlutfall þýðis
Fyrirtæki hér í borg ákvað að framkvæma skoðanakönnun til að kanna fylgi ríkisstjórnarinnar. Fyrirtæki þetta er með marga færa próffræðinga á sínum snærum svo við getum gert ráð fyrir að úrtakshögun og úrvinnsla hafi verið til fyrirmyndar. Niðurstaðan var að af þeim 8750 sem spurðir voru “styður þú ríkisstjórnina“ sögðu 4530 já og 4220 nei. Finnið 95% öryggisbil fyrir p, hlutfall þeirra sem styðja ríkisstjórnina. Taka skal fram að tölurnar í þessu dæmi eru uppspuni.

Byrjum á að finna p með jöfnu (7.1)

$$\hat{p} = \frac{x}{n} = \frac{4530}{8750} = 0.5177.$$

Skilyrðin um normalnálgun eru uppfyllt þar sem $n\hat{p}$ og $n(1-\hat{p})$ eru bæði stærri en 15 . Nú má reikna neðra öryggismark með jöfnu (7.2)

$$\hat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.5177 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5177(1-0.5177)}{8750}} = 0.5072$$

og efra öryggismark með jöfnu (7.3)

$$\hat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0.5177 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.5177(1-0.5177)}{8750}} = 0.5282.$$

Öryggisbilið má því skrifa sem

$$0.5072 < \ p \ < 0.5282.$$

Við áætlum því að 51.77% kjósenda styðji ríkisstjórnina og fullyrðum með 95% vissu að það hlutfall liggi á bilinu frá 50.72% upp í 52.82 %.

7.2. Ályktanir um hlutföll tveggja þýða

Í þessum hluta munum við skoða bilmat og tilgátupróf þar sem hlutföll mælinga sem hljóta tiltekið gildi flokkabreytu eru borin saman milli tveggja þýða. Dæmi um slíkt væri að kanna hvort hlutfall kvenna sem styður ríkistjórnina sé jafnt hlutfalli karla sem séu þeirrar skoðunar.

Þegar bera á saman hlutföll í tveimur þýðum er, til þæginda, venjan að kalla það þýði sem úrtakshlutfallið er hærra þýði 1 og hitt þýði 2. Við köllum hlutföll heppnaðra tilrauna í þýðunum tveimur p_1 og p_2. Tekin eru slembiúrtök úr þýðunum tveimur af stærð n_1 og n_2 og úrtakshlutföllin, $\hat{p}_1$ og $\hat{p}_2$ notuð til að meta þýðishlutföllin p_1 og p_2.

Jöfnur þeirra eru

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} \tag{7.6}$$

$$\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} \tag{7.7}$$

þar sem x_1 og x_2 eru fjöldi heppnaðra tilrauna í úrtökunum tveimur.

Tilgátuprófið í þessum hluta prófar núlltilgátuna hvort hlutföllin í hópunum tveimur séu jöfn. Núlltilgátuna ritum við $H_0 : p_1 = p_2$.

Líkt og þegar við könnum hlutfall eins þýðis notum við normalnálgun til að bera saman hlutföll tveggja þýða. Í þessu tilviki notum við þumalputtaregluna að séu $n_1\hat{p}_1$, $n_1(1-\hat{p}_1), n_2\hat{p}_2$ og $n_2(1-\hat{p}_2)$ eru öll stærri en 15 má beita normalnálgun . Ef skilyrðin eru ekki uppfyllt má nota tilgátupróf *endurvalsaðferð* til að meta tilgátuprófið eða framkvæma svokallað *Fishers próf*. Hvoruga aðferðina má reikna í höndunum en þær eru útfærðar í öllum helstu tölfræðihugbúnuðum.

7.3. Öryggisbil fyrir hlutföll tveggja þýða
Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt, þ.e.a.s ef $n_1\hat{p}_1$, $n_1(1-\hat{p}_1)$, $n_2\hat{p}_2$ og $n_2(1-\hat{p}_2)$ eru öll stærri en 15 má reikna neðra öryggismark fyrir muninn á p_1 og p_2 með:

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \tag{7.8}$$

og efra öryggismarkið með

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} \tag{7.9}$$

þar sem $\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1}$, $\hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2}$ og $z_{1-\alpha/2}$ fæst með að fletta upp í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260-263.

7.4. Tilgátupróf fyrir hlutföll tveggja þýða
Séu skilyrðin fyrir að nota normalnálgunina uppfyllt, þ.e.a.s ef $n_1\hat{p}_1$, $n_1(1-\hat{p}_1)$, $n_2\hat{p}_2$ og $n_2(1-\hat{p}_2)$ eru öll stærri en 15 má nota eftirfarandi tilgátupróf:

Núlltilgátan er:

$$\mathrm{H}_0 : p_1 = p_2$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{\frac{X_1}{n_1} - \frac{X_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}, \text{ þar sem } \hat{p} = \frac{X_1+X_2}{n_1+n_2} \tag{7.10}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0,1)$. Gagntilgátan getur verið einhliða eða tvíhliða og má sjá þær ásamt höfnunarsvæðunum hér að neðan.

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : p_1 < p_2$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : p_1 > p_2$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : p_1 \neq p_2$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Sýnidæmi 7.2: Ályktanir um hlutföll tveggja þýða

Skoðum aftur dæmi 7.1. Við fáum nú að vita að í raun voru úrtökin tvö, 4375 konur og 4375 karlar. Niðurstaðan var að af þeim 8750 sem spurðir voru "styður þú ríkisstjórnina" sögðu 4530 já og 4220 nei. Af þeim 4530 sem sögðust styðja ríkistjórnina voru 2337 konur. Finnið 95% öryggisbil fyrir mun á hlutföllum kvenna og karla sem styðja ríkisstjórnina og kannið hvort munur sé á hlutföllum kvenna og karla sem styðja ríkisstjórnina. Notið $\alpha = 0.05$. Taka skal fram að þetta dæmi er uppspuni.

Skilyrðin um normalnálgun eru uppfyllt þar sem $n_1\hat{p}_1$, $n_1(1-\hat{p}_1)$, $n_2\hat{p}_2$ og $n_2(1-\hat{p}_2)$ eru öll stærri en 15.

Byrjum á að finna $\hat{p}_1$ og $\hat{p}_2$. Gefið er í dæminu að fjöldi karla og fjöldi kvenna er jafn, $n_1 = n_2 = 4375$. Einnig var gefið að fjöldi kvenna sem sagðist styðja ríkisstjórnina er 2337 og fjöldi karla því 4530-2337 = 2193, því eru $x_1 = 2337$ og $x_2 = 2193$.

Reiknum nú $\hat{p}_1$ og $\hat{p}_2$ með jöfnum (7.6) og (7.7)

$$\hat{p}_1 = \frac{x_1}{n_1} = \frac{2337}{4375} = 0.5342 \text{ og } \hat{p}_2 = \frac{x_2}{n_2} = \frac{2193}{4375} = 0.5013.$$

Nú má reikna neðra öryggismark með jöfnu (7.8)

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} =$$

$$0.5342 - 0.5013 - 1.96\sqrt{\frac{0.5342(1-0.5342)}{4375} + \frac{0.5013(1-0.5013)}{4375}} = 0.0119$$

og efra öryggismark með jöfnu (7.9)

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{n_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{n_2}} =$$

$$0.5342 - 0.5013 + 1.96\sqrt{\frac{0.5342(1-0.5342)}{4375} + \frac{0.5013(1-0.5013)}{4375}} = 0.0537.$$

Öryggisbilið má því skrifa sem

$$0.0119 < \; p_1 - p_2 \; < 0.0537.$$

Til að kanna hvort munur sé á hlutföllunum förum við eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um mun á tveimur hlutföllum og notum við því próf fyrir mismun hlutfalla tveggja þýða. Við notum normalnálgun þar sem $n_1\hat{p}_1,\ n_1(1-\hat{p}_1),\ n_2\hat{p}_2$ og $n_2(1-\hat{p}_2)$ eru öll stærri en 15.
2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.
3. Við eigum að kanna hvort munur sé á hlutföllum karla og kvenna sem styðja ríkisstjórnina. Við notum því tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \; p_1 = p_2 \\ H_1 &: \; p_1 \neq p_2 \end{aligned}$$

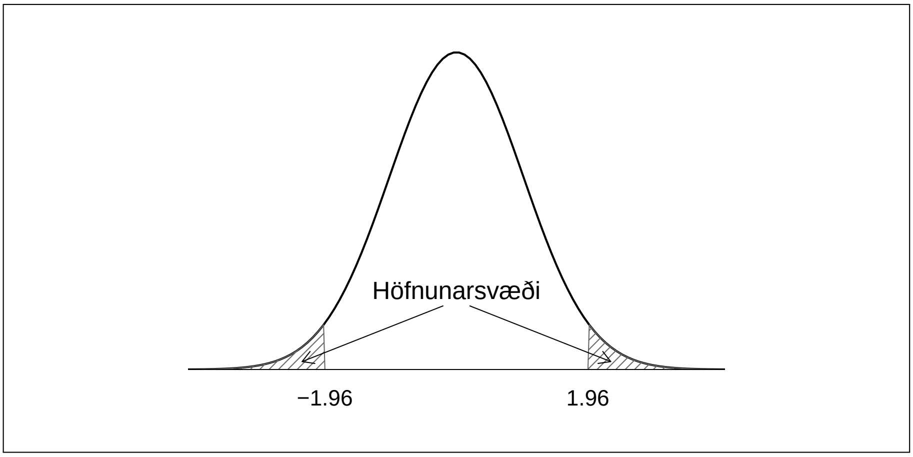
4. Við vitum að $\hat{p}_1 = 0.5342$ og $\hat{p}_2 = 0.5013$. Reiknum nú $\hat{p}$, sjá jöfnu (7.10), þar sem $\hat{p}$ kemur fyrir í prófstærðinni

$$\hat{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} = \frac{4530}{8750} = 0.5177.$$

Prófstærðina má svo reikna með jöfnu (7.10)

$$z = \frac{\frac{x_1}{n_1} - \frac{x_2}{n_2}}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{0.5342 - 0.5013}{\sqrt{0.5177(1-0.5177)\left(\frac{1}{4375} + \frac{1}{4375}\right)}} = 3.08.$$

5. Við notum töflu stöðluðu normaldreifingarinnar til að finna höfnunarsvæðin: $z_{1-\alpha/2}$ = $z_{0.975}$ = 1.96. Við höfnum því núlltilgátunni ef $z > 1.96$ eða ef $z < -1.96$. Við sjáum að $z > 1.96$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.
6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum því að munur sé á hlutföllum kvenna og karla sem styðja ríkisstjórnina.



7.3. Ályktanir um hlutföll fleiri þýða

Tilgátuna úr síðasta hluta má útvíkka þannig að hægt sé að bera saman hlutföll fleiri en tveggja þýða. Þá er ekki lengur hægt að nota aðferðir byggðar á nálgun normaldreifingarinnar heldur er stuðst við svokölluð kí-kvaðrat próf (χ^2-próf). Aðferðina má einnig nota þegar bera á saman hlutföll tveggja þýða eins og í hlutanum hér að framan, þó aðeins ef gagntilgátan er tvíhliða. Þá munu Kí-kvaðrat prófið og prófið sem byggir á normalnálgun alltaf gefa sömu niðurstöðuna.

Tilgátuprófið í þessum hluta prófar hvort hlutföll allra d þýðanna séu jöfn. Hana ritum við $H_0 : p_1 = p_2 = ... = p_d$. Ef við höfnum henni getum við ályktað að hlutföllin séu ekki öll jöfn hvort öðru en það felur ekki endilega í sér að þau séu öll ólík. Beita þyrfti þróaðri tölfræðiaðferðum, utan efni þessar bókar, til að komast að raun um það.

Eins og áður þurfa viss skilyrði að vera uppfyllt til að beita megi kí-kvaðrat prófi. Þeim skilyrðum er þó torvelt að lýsa án þess að þekkja aðferðina og því munum við koma aftur að þeim síðar. Kí-kvaðrat aðferðinni er sömuleiðis auðveldara að lýsa með dæmi en í orðum og förum við því þá leið hér á eftir.

Áður en hægt er að framkvæma kí-kvaðrat próf er gott að búa til þrjár töflur sem hjálpa okkur við að reikna prófstærðina sem notuð er í prófinu. Í kassa 7.5 má sjá hvernig búa má til þessar þrjár töflur og í kassa 7.6 má sjá tilgáturnar og prófstærðina sem notuð er til að prófa tilgáturnar.

7.5. Töflur fyrir kí-kvaðrat próf
Þegar framkvæma á kí-kvaðrat próf er gott að búa til þrjár töflur:

- Tafla mældrar tíðni: Inniheldur tíðni sem við fáum úr rannsókninni, táknuð með o.
- Tafla væntanlegrar tíðni: Inniheldur væntanlega tíðni, táknuð með e. Gildin fást með því að margfalda samtalstölurnar úr töflu mældrar tíðni úr þeim dálki og þeirri línu sem við erum stödd í og deila með heildarfjölda. Allar tölur í þessari töflu verða að vera hærri en 5 annars er ekki hægt að nota prófið.
- Tafla prófstærðar: Inniheldur framlag til prófstærðar reiknað með $\frac{(o-e)^2}{e}$. Að lokum eru allar tölurnar í töflu prófstærðar lagðar saman til að fá gildið á prófstærðinni (sjá kassa 7.6).

7.6. Kí-kvaðrat próf fyrir hlutföll
Tilgáturnar eru:

$$H_0 : p_1 = p_2 = ... = p_d$$

$$H_1 : \text{hlutföllin eru ekki öll jöfn}$$

Prófstærðin er:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{d} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \tag{7.11}$$

þar sem l er fjöldi lína, d er fjöldi dálka, o er mæld tíðni og e er væntanleg tíðni.

Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin χ^2-dreifingu með (l - 1) $\cdot$ (d - 1) fjölda frígráða.

Hafna skal núlltilgátunni sé $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))}$.

Þegar við vinnum með tvö þýði getum við hvort heldur notað aðferðina úr síðasta hluta sem byggði á normalnálgun eða kí-kvaðrat próf. Notum nú dæmið um ríkisstjórnina úr síðasta hluta (dæmi 7.2) til að skoða hvernig við búum til töflurnar þrjár sem við notum til að framkvæma kí-kvaðrat prófið.

Tafla mældrar tíðni

Fjöldi kvenna í úrtaki var 4375, fjöldi í karla úrtaki var 4375, fjöldi kvenna sem voru fylgjandi ríkisstjórninni voru 2337 og fjöldi karla sem voru fylgjandi ríkisstjórninni voru 2139. Setjum nú þessar upplýsingar sem við köllum mælda tíðni (observed frequency), upp í töflu. Köllum nú þessa töflu *töflu mældrar tíðni* og táknum gildi hennar með o.

Tafla mældrar tíðni	Konur	Karlar	Samtals
Fylgjandi ríkisstjórninni	**2337**	**2193**	**4530**
Ekki fylgjandi ríkisstjórninni	2038	2182	**4220**
Samtals	**4375**	**4375**	**8750**

Látum d tákna fjölda dálka í töflu sem þessari og l fjölda lína, að samtalsdálknum og samtalslínunni undanskildri. Þá köllum við töflu sem þessa lxd-töflu. Taflan hér að ofan er því 2x2-tafla.

Tafla væntanlegrar tíðni

Því næst búum við til aðra töflu sem inniheldur svonefnda væntanlega tíðni (expected frequency). Hún inniheldur þann fjölda sem búast mætti við að sjá í hverjum hóp ef núlltilgátan væri sönn. Sú tafla er þar af leiðandi af sömu stærð og tafla mældrar tíðni, í þessu tilviki 2x2. Köllum þessa töflu *töflu væntanlegrar tíðni* og táknum gildi hennar með e.

Gildin í töflu væntanlegrar tíðni fást með því að margfalda samtalstölurnar úr töflu mældrar tíðni úr þeim dálki og þeirri línu sem við erum stödd í og deila með heildarfjölda. Skilyrðið sem þarf að gilda til að framkvæma megi kí-kvaðrat próf er að tölurnar í þessari töflu séu stærri en 5.

Tafla væntanlegrar tíðni	Konur	Karlar
Fylgjandi ríkisstjórninni	$\frac{4375\cdot 4530}{8750} = 2265$	$\frac{4375\cdot 4530}{8750} = 2265$
Ekki fylgjandi ríkisstjórninni	$\frac{4375\cdot 4220}{8750} = 2110$	$\frac{4375\cdot 4220}{8750} = 2110$

Tafla prófstærðar

Til að reikna út prófstærðina fyrir kí-kvaðrat prófið er best að búa til töflu sem inniheldur framlag til prófstærðarinnar. Köllum hana *töflu prófstærðar*. Taflan er að sömu stærð og töflunar hér að framan, í þessu tilfelli 2x2. Fyrir hvert pláss í töflunni reiknum við $\frac{(o-e)^2}{e}$ þar sem o og e eru gildin í töflu mældrar tíðni og töflu væntanlegrar tíðni sem eru á sama stað í töflunum og það gildi sem verið er að reikna út. Skoðum nú aftur fyrstu töflurnar tvær og hvernig reikna má út gildin í töflu prófstærðar.

Tafla mældrar tíðni (o)	Konur	Karlar
Fylgjandi	2337	2193
Ekki fylgjandi	2038	2182

Tafla væntanlegrar tíðni (e)	Konur	Karlar
Fylgjandi	2265	2265
Ekki fylgjandi	2110	2110

Reiknum nú gildin í töflu prófstærðar með $\frac{(o-e)^2}{e}$.

Tafla prófstærðar	Konur	Karlar
Fylgjandi	$\frac{(2337-2265)^2}{2265} = 2.29$	$\frac{(2193-2265)^2}{2265} = 2.29$
Ekki fylgjandi	$\frac{(2038-2110)^2}{2110} = 2.46$	$\frac{(2182-2110)^2}{2110} = 2.46$

Til að reikna prófstærðina þurfum við að lokum að leggja saman allar tölurnar í töflu prófstærðar.

Sýnidæmi 7.3: Kí-kvaðrat próf - 2x2 tafla

Skoðum aftur dæmið um ríkisstjórnina frá dæmi 7.2. Kannið nú hvort munur sé á stuðningi við ríkisstjórnina milli kynja með að nota kí-kvaðrat próf.

Í dæmi sem þessu þarf að byrja á að búa til töflurnar þrjár. Við höfum þegar gert það fyrir þessi gögn og getum við því hafist handa við tilgátuprófið.

1. Við ætlum að álykta um mun á tveimur hlutföllum með að nota kí-kvaðrat próf. Í töflunni fyrir væntanlega tíðni eru allar tölurnar stærri en 5 og því er í lagi að nota prófið.

2. Notum $\alpha = 0.05$.

3. Við eigum að kanna hvort munur sé á hlutfalli karla og kvenna sem styðja ríkisstjórnina. Við notum því tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

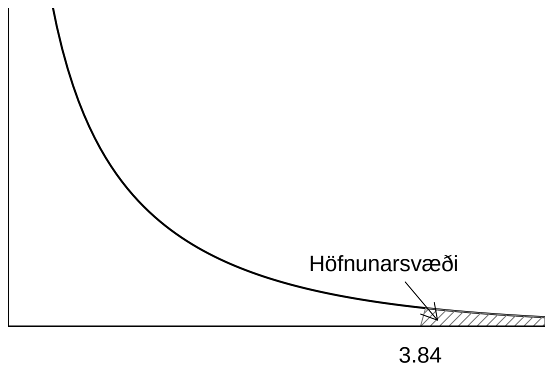
$$\begin{aligned} H_0 &: p_1 = p_2 \\ H_1 &: p_1 \neq p_2 \end{aligned}$$

4. Við notum töflu prófstærðar til að finna gildin sem fara inn í útreikningana fyrir prófstærðina. Prófstærðin er:

$$\chi^2 = \sum\sum \frac{(o-e)^2}{e} = 2.29 + 2.29 + 2.46 + 2.46 = 9.50.$$

5. Við flettum upp í kí-kvaðrat töflu með einni frígráðu til að finna höfnunarsvæðið. $\chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))} = \chi^2_{0.95,(1)} = 3.84$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $\chi^2 > 3.84$. Við sjáum að $\chi^2 > 3.84$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum því að munur sé á hlutfalli kvenna og karla sem styðja ríkisstjórnina.



Aðferðirnar tvær, að nota normalnálgun og kí-kvaðrat prófið, munu alltaf gefa sömu niðurstöðu. Það gildir nefnilega að kí-kvaðrat prófstærðin er jöfn z-prófstærðinni í öðru veldi.

Skoðum nú annað dæmi þar sem hóparnir sem við erum að skoða eru fleiri en 2.

Sýnidæmi 7.4: Kí-kvaðrat próf - 2x3 tafla
Eftirfarandi gögn eru niðurstöður könnunar þar sem slembiúrtak úr þremur ráðuneytum hér á landi var tekið og fólk spurt hvort það væri ánægt með eftirlaunaáætlun ríkisins. Úrtak af stærð 100 var tekið úr fyrsta ráðuneytinu og úrtök af stærð 150 úr hinum tveimur.

	Ráðuneyti 1	Ráðuneyti 2	Ráðuneyti 3
Ánægt með áætlun	66	85	108
Ekki ánægt með áætlun	34	65	42

Í dæmi sem þessu þarf að byrja á að búa til töflurnar þrjár. Fyrsta taflan er sú sama og hér að ofan nema við bætum við samtalsdálki og -línu.

Mæld tíðni - *o*	Ráðuneyti 1	Ráðuneyti 2	Ráðuneyti 3	Samtals
Ánægt	66	85	108	259
Ekki ánægt	34	65	42	141
Samtals	100	150	150	400

Gildin í töflu væntanlegrar tíðni fást með því að margfalda samtalstölurnar úr töflu mældrar tíðni úr þeim dálki og þeirri línu sem við erum stödd í og deila með heildarfjölda.

Væntanleg tíðni - e	Ráðuneyti 1	Ráðuneyti 2	Ráðuneyti 3
Ánægt	$\frac{100 \cdot 259}{400} = 64.75$	$\frac{150 \cdot 259}{400} = 97.13$	$\frac{150 \cdot 259}{400} = 97.13$
Ekki ánægt	$\frac{100 \cdot 141}{400} = 35.25$	$\frac{150 \cdot 141}{400} = 52.88$	$\frac{150 \cdot 141}{400} = 52.88$

Reiknum nú gildin í töflu prófstærðar með $\frac{(o-e)^2}{e}$

Prófstærð	Ráðuneyti 1	Ráðuneyti 2	Ráðuneyti 3
Ánægt	$\frac{(66-64.75)^2}{64.75} = 0.02$	$\frac{(85-97.13)^2}{97.13} = 1.51$	$\frac{(108-97.13)^2}{97.13} = 1.22$
Ekki ánægt	$\frac{(34-35.25)^2}{35.25} = 0.04$	$\frac{(65-52.88)^2}{52.88} = 2.78$	$\frac{(42-52.88)^2}{52.88} = 2.24$

Nú erum við tilbúin að hefjast handa við tilgátuprófið.

1. Við ætlum að álykta um mun á þremur hlutföllum með því að nota kí-kvaðrat próf. Í töflunni fyrir væntanlega tíðni eru allar tölurnar stærri en 5 og því er í lagi að nota prófið.

2. Notum $\alpha = 0.05$.

3. Við eigum að kanna tilgátuna hvort munur sé milli ráðuneyta á ánægju með eftirlaunaáætlun. Tilgáturnar eru:

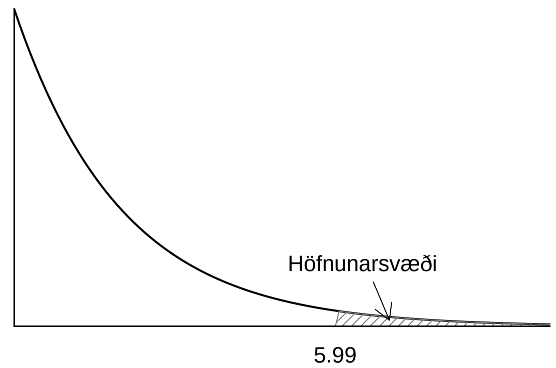
$$\begin{aligned} H_0 &: p_1 = p_2 = p_3 \\ H_1 &: p_1, p_2, p_3, \text{ eru ekki öll jöfn} \end{aligned}$$

4. Við notum töflu prófstærðar til að finna gildin sem fara inn í útreikningana fyrir prófstærðina. Prófstærðin er:

$$\begin{aligned} \chi^2 =& \sum\sum \frac{(o-e)^2}{e} = 0.02 + 1.51 + 1.22 + 0.04 + 2.78 + 2.24 \\ =& 7.81. \end{aligned}$$

5. Við flettum upp í kí-kvaðrat töflu með tveimur frígráðum til að finna höfnunarsvæðið. $\chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))} = \chi^2_{0.95,(2)} = 5.99$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $\chi^2 > 5.99$. Við sjáum að $\chi^2 > 5.99$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum því að munur sé á hlutfalli þeirra sem eru ánægðir með eftirlaunaáætlunina í ráðuneytunum þremur.



7.3.1. Mátgæðapróf

Aðferðina í þessum hluta má einnig nota til að framkvæma svokölluð *mátgæðapróf* (e. goodness of fit tests). Þeim prófum beitum við þegar við höfum fyrirfram ákveðnar kenningar um það hver hlutföllin $p_1, \ldots, p_d$ eigi að vera og við viljum kanna hvort að mælingarnar okkar samræmist þeirri kenningu.

Tilgátuprófið er framkvæmt á nákvæmlega sama hátt, nema það verður einfaldara að reikna væntanlegu tíðnina, e, í töflu væntanlegrar tíðni. Væntanlega tíðnin í hverjum dálki er einfaldlega $n \cdot p_i$, þ.e. heildarfjöldi mælinga sinnum það hlutfall sem við gerum ráð fyrir að gildi fyrir þennan flokk. Prófstærðin er reiknuð á sama hátt en núna miðum við hana við gildið $\chi^2_{1-\alpha,d-1}$.

Mátgæðapróf eru sérstök að því leyti að við viljum yfirleitt ekki hafna núlltilgátunni. Við notum þau því ekki til að draga miklar ályktanir, því ef við höfum fáar mælingar höfum við sennilega of lítinn styrk til að hafna núlltilgátunni þrátt fyrir að hún sé í raun ósönn og ef við höfum margar mælingar getum við hafnað núlltilgátunni þrátt fyrir að frávikin séu ekki ýkja mikil. Því notum við mátgæðapróf eingöngu til að fá vísbendingu um hvort niðurstöðurnar séu nokkuð í hrópandi mótsögn við kenningarnar okkar.

7.4. Tengslatöflur

Í hluta 7.3 sáum við hvernig bera má saman skiptingu flokkabreytu í mismunandi þýðum. Í þessum hluta munum við sjá hvernig bera má saman tvær flokkabreytur þar sem gögnum er aflað úr sama þýðinu. Til þess eru notaðar svokallaðar tengslatöflur og prófin ganga út á að svara spurningunni hvort breyturnar tvær séu óháðar. Prófstærðin sem notast er við er sú sama og áður og eru allir útreikningar því eins. Tilgáturnar eru þó settar fram á annan máta.

Eins og í hluta 7.3 má ekki framkvæma tilgátuprófið ef einhverjar tölur í töflu væntanlegrar tíðni eru minni en fimm. Þá má annað hvort framkvæma *endurvalsaðferð* til að framkvæma prófið eða þá að framkvæma *Fishers próf*. Þær aðferðir er sem fyrr ekki hægt að framkvæma í höndunum. Einnig er algengt að fara þá leið að *sameina suma flokka* annarrar eða beggja flokkabreytanna eins og lýst var í undirkafla 2.2.1. Er það einungis gert ef að skipting flokkanna í flokkabreytunni var óþarflega fín og flokkarnir tveir eða fleiri sem sameinaðir eru séu mjög líkir að eiginleikum.

7.7. Tengslatöflur (contingency tables)

Tengslatöflur eru notaðar til að kanna hvort samband sé á milli tveggja flokkabreyta . Tilgáturnar eru

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \text{Það er ekki samband á milli breytanna tveggja} \\
H_1 &: \text{Það er samband á milli breytanna tveggja}
\end{aligned}
$$

Prófstærðin er

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{d} \frac{(o_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}} \tag{7.12}$$

þar sem l er fjöldi lína, j er fjöldi dálka, o er mæld tíðni og e er væntanleg tíðni. Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin χ^2-dreifingu með (l - 1) $\cdot$ (d - 1) fjölda frígráða. Hafna skal núlltilgátunni sé $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))}$.

Sýnidæmi 7.5: Tengslatöflur

Fyrirtæki hafði áhuga á að kanna hvort það væri samband á milli þess hvernig starfsmenn stæðu sig í þjálfunarprógrammi og hvernig þeir stæðu sig svo í vinnunni. Til að kanna hvort svo væri var tekið slembiúrtak af stærð 400. Niðurstöðurnar má sjá hér að neðan.

		Þjálfunarprógram		
		Neðan meðals	Meðal	Ofan meðals
	Neðan meðals	24	59	29
Vinna	Meðal	24	79	64
	Ofan meðals	12	49	60

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort samand sé á milli hvernig starfsmenn stæðu sig í þjálfunarprógrammi og hvernig þeir stæðu sig svo í vinnunni.

Byrjum á að búa til töflurnar þrjár. Fyrsta taflan er sú sama og hér að ofan nema við bætum við samtalsdálki og -línu.

Mæld tíðni - o	Neðan meðals	Meðal	Ofan meðals	Samtals
Neðan meðals	24	59	29	112
Meðal	24	79	64	167
Ofan meðals	12	49	60	121
Samtals	60	187	153	400

Gildin í töflu væntanlegrar tíðni fást með því að margfalda samtalstölurnar úr töflu mældrar tíðni úr þeim dálki og þeirri línu sem við erum stödd í og deila með heildarfjölda.

Væntanleg tíðni - e	Neðan meðals	Meðal	Ofan meðals
Neðan meðals	$\frac{60\cdot 112}{400}=16.80$	$\frac{187\cdot 112}{400}=52.36$	$\frac{153\cdot 112}{400}=42.84$
Meðal	$\frac{60\cdot 167}{400}=25.05$	$\frac{187\cdot 167}{400}=78.07$	$\frac{153\cdot 167}{400}=63.88$
Ofan meðals	$\frac{60\cdot 121}{400}=18.15$	$\frac{187\cdot 121}{400}=56.57$	$\frac{153\cdot 121}{400}=46.28$

Reiknum gildin í töflu prófstærðar með $\frac{(o-e)^2}{e}$

Prófstærð	Neðan meðals	Meðal	Ofan meðals
Neðan meðals	$\frac{(24-16.80)^2}{16.80}=3.09$	$\frac{(59-52.36)^2}{52.36}=0.84$	$\frac{(29-42.84)^2}{42.84}=4.47$
Meðal	$\frac{(24-25.05)^2}{25.05}=0.04$	$\frac{(79-78.07)^2}{78.07}=0.01$	$\frac{(64-63.88)^2}{63.88}=0.00$
Ofan meðals	$\frac{(12-18.15)^2}{18.15}=2.08$	$\frac{(49-56.57)^2}{56.57}=1.01$	$\frac{(60-46.28)^2}{46.28}=4.07$

Nú erum við tilbúin að hefjast handa við tilgátuprófið.

1. Við höfum tengslatöflu og notum því kí-kvaðrat próf. Við höfum tengslatöflu því við erum að kanna hvort samband sé á milli tveggja breyta í einu þýði. Í töflunni fyrir væntanlega tíðni eru allar tölurnar stærri en 5 og því er í lagi að nota prófið.
2. Notum $\alpha = 0.05$.
3. Við eigum að kanna hvort samband sé á milli árangurs í þjálfunarprógrammi og vinnu. Tilgáturnar eru:

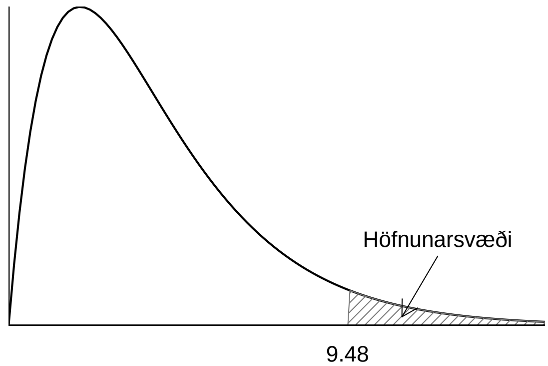
   H_0 : Það er ekki samband á milli frammistöðu í þjálfun og vinnu

   H_1 : Það er samband á milli frammistöðu í þjálfun og vinnu
4. Við notum töflu prófstærðar til að finna gildin sem fara inn í útreikningana fyrir prófstærðina. Prófstærðin er:

$$\chi^2 = \sum\sum \frac{(o-e)^2}{e} = 3.09 + 0.84 + 4.47$$
$$+0.04 + 0.01 + 0.00 + 2.09 + 1.01 + 4.07 = 15.62.$$

5. Við flettum upp í kí-kvaðrat töflu með fjórum frígráðum til að finna höfnunarsvæðið. $\chi^2_{1-\alpha,((l-1)\cdot(d-1))} = \chi^2_{0.95,(4)} = 9.488$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $\chi^2 > 9.488$. Við sjáum að $\chi^2 > 9.488$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum því að samband sé á milli frammistöðu í þjálfunarprógrammi og vinnu.



Dæmi

Dæmi 7.1
Í tilraun með áhrif mismunandi fóðrunar á frjósemi sauðfjár voru tveir fóðurflokkar kannaðir, A og B og fékkst eftirfarandi fjöldi einlembdra og tvílembdra áa í hvorum flokki:

	Fóðurflokkur A	Fóðurflokkur B
Einlembdar	60	82
Tvílembdar	132	108

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á milli frjósemi eftir fóðurflokkum. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 7.2
Um áramótin 2009 var gerð könnun meðal 2500 landsmanna um afstöðu þeirra til byggingar Norðlingaölduveitu. Niðurtöður könnunarinnar var sú að 1577 sögðust hlynntir og 923 á móti. Finnið 95% öryggisbil fyrir hlutfall landsmanna sem hlyntir eru Norðlingaölduveitu.

Dæmi 7.3
Skólayfirvöld í skóla nokkrum höfðu stóðu fyrir tilraun þar sem 230 stúdentar voru valdir af handahófi og þeir spurðir tveggja spurninga. Fyrri spurningin var hvort þau ættu börn eða ekki og sú seinni var hvort þau væru í fullu námi eða ekki. Niðurstöðurnar má sjá hér að neðan:

Tafla mældrar tíðni	Á börn	Á ekki börn
Í fullu námi	31	170
Ekki í fullu námi	15	14

Skólayfirvöld í skólanum ætla nú að greina þessi gögn með kí-kvaðrat prófi.

a) Hér að neðan má sjá töflu væntanlegrar tíðni en það vantar eitt gildi. Hvert er gildið?

Tafla væntanlegrar tíðni	Á börn	Á ekki börn
Í fullu námi		160.8
Ekki í fullu námi	5.8	23.2

b) Hér að neðan má sjá töflu prófstærðar en það vantar eitt gildi. Hvert er gildið?

Tafla prófstærðar	Á börn	Á ekki börn
Í fullu námi	2.105	0.526
Ekki í fullu námi	14.593	

c) Hvaða gagntilgáta er viðeigandi fyrir gögn af þessu tagi?

Dæmi 7.4
Lalli lífefnafræðingur er að vinna með 4x4 tengslatöflu. Hversu margar frígráður hefur prófstærðin sem hann á að nota?

Dæmi 7.5
8. apríl 2011 stóð fyrirtæki nokkurt fyrir skoðanakönnun þar sem spurt var: ”Ef kosið yrði um nýjustu Icesave lögin í dag, hvort myndir þú kjósa með eða á móti?” 722 tóku afstöðu og af þeim sögðust 414 ætla að kjósa á móti lögunum. Göngum út frá að tilrunahögunin hafi verið í lagi.

a) Hvert er mat þitt á hlutfalli kjósenda sem ætluðu sér að kjósa á móti lögunum?
b) Finnið neðra mark 95% öryggisbils fyrir hlutfall kjósenda sem ætluðu sér að kjósa á móti lögunum.

Dæmi 7.6
Fyrirtæki hér í bæ stóð fyrir skoðanakönnun þar sem fylgi forsetans var kannað. 200 einstaklingar sem búsettir eru á landsbyggðinni og 200 einstaklingar búsettir á höfuðborgasvæðinu voru spurðir hvort þeir styðji forsetann. Af þeim einstaklingum sem búsettir eru á landsbyggðinni sögðust 108 styðja forsetann en 95 af þeim sem búa á höfuðborgarsvæðinu.

a) Finnið efra mark 95% öryggisbils fyrir mun á hlutfalli þeirra sem styðja forsetann á landsbyggðinni og hlutfalli þeirra sem styðja forsetann á höfuðborgarsvæðinu.
b) Hvert er höfnunarsvæðið ef kanna á hvort hlutfall fólks sem styður forsetann sé mismunandi á landsbyggðinni og á höfuðborgarsvæðinu (notið $\alpha = 0.05$)?

Dæmi 7.7
Í boltalandinu í IKEA eru rauðir og bláir boltar. Siggi sæti veltir fyrir sér hvort jafnmargir boltar séu af hvorum lit og ákveður að nota tölfræðiþekkingu sína til að rannsaka það. Hann velur af handahófi 200 bolta og telur allar rauðu boltana. Boltalandið í IKEA er mjög stórt og þar eru miklu fleiri en 200 boltar. Í úrtakinu hans Sigga sæta voru 104 rauðir boltar.

a) Hvert er mat Sigga sæta á hlutfalli rauðra bolta í boltalandinu?
b) Hvert er 95%-öryggisbil fyrir hlutfall rauðra bolta?

Dæmi 7.8
Til að kanna hvort hlutfall karla og kvenna með of hátt kólestról í blóðinu sé mismunandi hátt voru valdir af handahófi 500 karlmenn og 600 konur og kólesteról í blóði þeirra mælt. 131 karlmaður mældist með of hátt kólesteról og 118 konur. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort hlutfall karla með of hátt kólesteról í blóði sé frábrugðið hlutfalli kvenna. ($\alpha = 0.05$).

Dæmi 7.9
Skoðunarkönnun var framkvæmd í Bandaríkjunum til að kanna hvort samaband væri á milli kyns og stjórnmálaskoðana. 300 manns tóku þátt í könnuninni og talið hversu margir konur og karlar kjósa Demókrata, Repúblikana og voru óháðir. Niðurstöðurnar má sjá hér að neðan:

	Demókrati	Repúblikani	Óháður
Kona	68	56	32
Karl	52	72	20

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort samband sé á milli kyns og stjórnmálaskoðana. Notið $\alpha = 0.05$.

8. kafli

Ályktanir um talnabreytur

Í þessum kafla munum við fjalla um öryggisbil og tilgátupróf sem við framkvæmum til að draga ályktanir um talnabreytur. Algengast er að ályktanir um talnabreytur séu byggðar á meðaltölum þeirra og fjallar meginhluti þessa kafla, eða allur kafli 8.2, um *ályktanir um meðaltöl*. Það veltur hins vegar stundum á því hvernig dreifni talnabreytanna er háttað, hvaða tilgátupróf um meðaltal er viðeigandi að framkvæma og eru þá tilgátupróf fyrir dreifni oft framkvæmd áður en hafist er handa við að kanna meðaltölin. Því munum við hefja umfjöllunina á *ályktunum um dreifni*, sem er efni kafla 8.1.

8.1. Ályktanir um dreifni

Tilgátuprófin og öryggisbilin sem við munum skoða í þessum hluta eiga við þegar draga á ályktun um dreifni normaldreifðra þýða, sem við táknum σ^2. Við byrjum á að skoða ályktanir um dreifni í einu þýði, en þess konar ályktanir eru meðal annars mikið notaðar við könnun ýmissa framleiðsluferla. Við munu sjá dæmi um slíkt í hluta 8.1.1. Þar á eftir, í hluta 8.1.2, skoðum við tilgátupróf sem notað er til að kanna hvort dreifni tveggja þýða, σ_1^2 og σ_2^2, sé ólík. Ef við getum gert ráð fyrir að dreifni tveggja þýða sé sú sama notum við annað tilgátupróf til að draga ályktanir um mismun meðaltala þeirra, heldur en ef dreifnin væri ólík. Því er tilgátuprófið í hluta 8.1.2 oft framkvæmt áður en meðaltöl þýðanna eru könnuð.

8.1.1. Ályktanir um dreifni í einu þýði

Þegar reikna á öryggisbil og prófa tilgátur um dreifni þýðis er notast við χ^2-dreifinguna, sjá kafla 5.4.2. Núlltilgátan er sett fram á þann hátt að dreifni þýðisins sé jöfn einhverju ákveðnu gildi sem við köllum σ_0^2, ritað $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$. Byrjum á að skoða hvernig smíða má öryggisbilið:

8.1. Öryggisbil fyrir dreifni normaldreifðs þýðis
Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}} \tag{8.1}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}} \tag{8.2}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}} \tag{8.3}$$

þar sem n er fjöldi mælinga í úrtakinu og s^2 er dreifni úrtaksins. $\chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}$ og $\chi^2_{\alpha/2,(n-1)}$ má finna í χ^2-töflu blaðsíðu 265.

Tilgátuprófið má svo framkvæma á eftirfarandi hátt:

8.2. Tilgátupróf fyrir dreifni normaldreifðs þýðis
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

Prófstærðin er:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \tag{8.4}$$

Gagntilgáturnar og höfnunarsvæðin eru

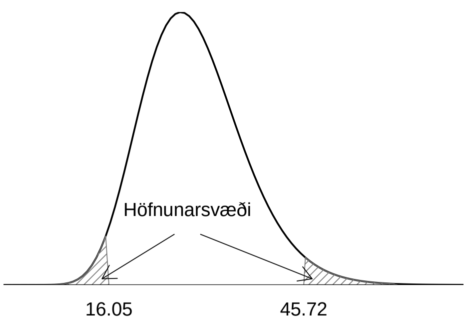
Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$	$\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\chi^2 < \chi^2_{\alpha/2,(n-1)}$ eða $\chi^2 > \chi^2_{1-\alpha/2,(n-1)}$

Sýnidæmi 8.1: Ályktanir um dreifni þýðis
Bjarki drekkur mikið gos. Hann og fleiri neytendur hafa undanfarið sent kvartanir til gosverksmiðju nokkurrar um að of lítið gos sé í flöskum sem verksmiðjan selur. Mikilvægt er að áfyllingarferlið í verksmiðjunni sé stöðugt og dreifnin fari ekki yfir 10 ml^2 því fari hún yfir það mark mun of hátt hlutfall flaskanna innihalda of lítið eða of mikið gos. Til að kanna þetta frekar ákvað stjórn fyrirtækisins að framkvæma tilraun þar sem slembiúrtak af stærð 30 var tekið og magn í

flöskunum mælt. Gera má ráð fyrir að magn í flöskunum fylgi normaldreifingu. Staðalfrávik magns í flöskunum 30 var reiknað, $s = 3.5$. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort dreifni ferlisins sé hærri en 10 ml^2. Notið $\alpha = 0.05$.

Förum eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að kanna tilgátu um dreifni normaldreifðs þýðis.
2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.
3. Við ætlum að kanna hvort dreifnin sé hærri en þar sem að dreifnin gæti í raun verið lægri notum við tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:
$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma^2 = 10 \\ H_1 &: \sigma^2 \neq 10. \end{aligned}$$
4. Prófstærðin er:
$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}.$$
Pössum okkur á að við fengum gefið að staðalfrávikið sé $s = 3.5$. Við þurfum því að hefja í annað veldi til að finna dreifnina, $s^2 = 3.5^2 = 12.25$. Við höfum einnig að $n-1 = 30-1 = 29$, $\sigma_0^2 = 10$. Við setjum þessar tölur inn í jöfnu prófstærðarinnar og fáum
$$\chi^2 = \frac{29 \cdot 12.25}{10} = 35.53.$$
5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess χ^2-töflu, $\chi^2_{0.025,(29)} = 16.05$ og $\chi^2_{0.975,(29)} = 45.72$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $\chi^2 < 16.05$ eða $\chi^2 > 45.72$. Við sjáum að svo prófstærðin fellur ekki á höfnunarsvæðið.
6. Við getum ekki hafnað núlltilgátunni og getum því ekki ályktað að dreifnin sé hærri en 10 ml^2.



8.1.2. Ályktanir um dreifni tveggja þýða

Tilgátuprófin sem við skoðum í þessum hluta eru notuð til að bera saman dreifni tveggja þýða sem fylgja normaldreifingu . Próf af þessu tagi eru meðal annars oft gerð áður en tilgátupróf fyrir mismun meðaltals tveggja þýða er framkvæmt. Þegar reikna á öryggisbil og prófa tilgátur um dreifni tveggja þýðis er notast við F-dreifinguna, sjá kafla 5.4.2.

Núlltilgátan lýsir hlutlausu ástandi, þ.e. að dreifni þýðanna tveggja sé jöfn, ritað $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$.

8.3. Tilgátupróf fyrir dreifni tveggja normaldreifðra þýða
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

Gagntilgátan getur verið einhliða eða tvíhliða og er prófstærðin mismunandi eftir því hvernig gagntilgátan er sett upp. Mögulegar gagntilgátur, prófstærðir og höfnunarsvæði þeirra má sjá hér að neðan.

Gagntilgáta	Prófstærð	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$F = \frac{S_2^2}{S_1^2}$	$F > F_{1-\alpha,(n_2-1,n_1-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$	$F > F_{1-\alpha,(n_1-1,n_2-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F = \frac{S_M^2}{S_m^2}$	$F > F_{1-\alpha/2,(n_M-1,n_m-1)}$

Í tvíhliða prófinu skal ávallt velja úrtakið með hærri dreifni sem úrtak M og úrtakið með lægri dreifni sem úrtak m.

Sýnidæmi 8.2: Ályktanir um dreifni tveggja normaldreifðra þýða
Ingunn og Árni vinna á Jafnréttisstofu og hafa þau mikinn áhuga á rannsaka laun karla og kvenna sem starfa við kjötvinnslu. Jafnréttisstofa stóð því fyrir rannsókn til að kanna hvort munur sé á meðallaunum karla og kvenna. Slembiúrtök voru því tekin úr báðum þýðum, 20 karlar og 20 konur. Meðaltal og staðalfrávik launa í karla úrtakinu voru 245163 kr og 22814. Í konu úrtakinu voru meðaltal og staðalfrávik 218634 og 18312. Gerið ráð fyrir að launin fylgi normaldreifingu.

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort dreifni þýðanna sé misjöfn. Notið $\alpha = 0.05$.

Förum eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að kanna tilgátu um dreifni tveggja normaldreifðra þýða.
2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.
3. Við ætlum að kanna hvort dreifni þýðanna er mismunandi og notum við því tvíhliða próf.

   Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{aligned}$$

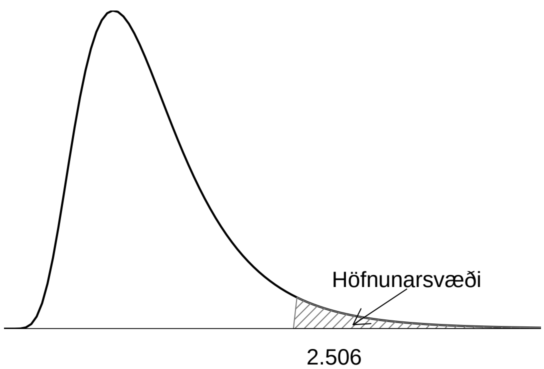
4. Prófstærðin er:

$$F = \frac{S_M^2}{S_m^2}.$$

   Þar sem staðalfrávik í karla úrtakinu er hærra köllum við karla hópinn hóp M og kvenna hópinn hóp m. Setjum nú inn í prófstærðina og fáum

$$f = \frac{22814^2}{18312^2} = 1.55.$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess F-töflu. $F_{1-\alpha/2,(n_M-1,n_m-1)} = F_{0.975,(19,19)}$. Sé F-taflan á blaðsíðu 268 skoðuð má sjá að þar er ekki að finna gildi fyrir $F_{0.975,(19,19)}$ og notum við því það sem er næst, $F_{0.975,(20,19)} = 2.506$, svo við höfnum núlltilgátunni ef $f > 2.506$. Við sjáum að $f < 2.506$ svo prófstærðin fellur ekki á höfnunarsvæðið.
6. Við getum ekki hafnað núlltilgátunni og getum því ekki ályktað að dreifnin sé mismunandi.



8.2. Ályktanir um meðaltöl

Það er óhætt að segja að ályktanir um meðaltöl séu einna algengasta ályktunartölfræði sem beitt er. Í þessum hluta skoðum við tilgátupróf og öryggisbil sem eiga við þegar draga á ályktun um meðaltöl þýða, sem við táknum μ. Í kafla 8.2.1 skoðum við ályktanir um meðaltal í *einu þýði*. Í kafla 8.2.2 skoðum svo tilgátupróf sem notað er til að kanna hvort meðaltöl *tveggja óháðra þýða*, μ_1 og μ_2, séu ólík og að lokum er fjallað um tilgátupróf fyrir *paraðar mælingar* í hluta 8.2.3.

Það fer eftir aðstæðum hvers kyns tilgátupróf og öryggisbil við reiknum þegar draga á ályktanir um meðaltöl þýðis. Í þessum kafla munum við fjalla um z-próf/öryggisbil annars vegar og t-próf/öryggisbil hins vegar. Almennt byrjum við á að skoða hvenær z-próf/öryggisbil eiga við og í framhaldinu könnum við hvenær er viðeigandi að nota t-próf/öryggisbil. Við munum sjá að t-próf hafa ætíð minni líkur á villu af gerð I heldur en z-próf og þar af leiðandi er algengara að notast við t-próf þegar unnið er í tölfræðihugbúnaði. Z-próf er hins vegar auðveldara að reikna í höndunum.

Við viljum benda á að aðferðirnar í þessum kafla eiga ekki við ef hvort tveggja gildir í senn: að úrtökin sem við byggjum ályktarnir okkar á eru lítil og að ekki er hægt að gera ráð fyrir að þýðin fylgi normaldreifingu. Í þeim tilvikum er stundum hægt að *umbreyta* (e. transform) gögnunum, nota *endurvalsaðferðir* (e. resampling methods) eða nota *stikalaus próf* (e.nonparametric tests) en ekki verður farið nánar í það hér.

8.2.1. Ályktanir um meðaltal þýðis

Við byrjum á því að fjalla um tilgátupróf og öryggisbil fyrir meðaltal þýðis, μ. Þessar aðferðir notum við ef við viljum til dæmis sýna fram á að meðalvirkni lyfs sé meiri en eitthvað ákveðið viðmiðunargildi eða að meðalfjöldi gistinátta í júlí síðustu tíu ár sé frábrugðinn einhverju ákveðnu gildi.

Núlltilgátan er ávalt sú sama, hvort meðaltal þýðisins sé jafnt einhverju ákveðnu gildi sem við köllum μ_0. Núlltilgátuna ritum við $H_0 : \mu = \mu_0$.

Z-próf og öryggisbil

Ein ástæða þess hve meðaltöl eru mikið notuð til að lýsa samfelldum breytum er normaldreifingin. Við sáum í kafla 6.2 að þegar þýðið sem verið er að kanna fylgir normaldreifingu mun úrtaksdreifing meðaltalsins fylgja normaldreifingu sama hversu lítið úrtakið er. Jafnframt sagði *Höfuðsetning tölfræðinnar* okkur, í kafla 6.3, að ef úrtakið er stórt má nálga úrtaksdreifingu meðaltalsins með normaldreifingu. Við miðum oft við þumalputtaregluna að úrtakið þurfi að vera stærra en 30 til að svo gildi.

Í kafla 6.3 sáum við líka að í þessum ofangreindu tilvikum er dreifni úrtaksdreifingar meðaltalsins σ^2/n, þar sem σ^2 er dreifni þýðisins, en n fjöldi mælinga. Ef að dreifni þýðisins, væri þekkt gætum við þannig reiknað öryggisbil á svipstundu með því að margfalda σ^2/n með $z_{1-\alpha/2}$ og draga frá eða bæta við reiknaða meðaltalið. Sú aðferð er sýnd í kassa 8.2.1. Á sambærilegan hátt er hægt að framkvæma tilgátupróf og er það sýnt í kafla 8.2.1.

Í reynd þekkjum við yfirleitt aðeins dreifni úrtaksins, s^2, sem við reiknum út frá gögnunum okkar, en ekki dreifni alls þýðisins. Í þeim tilvikum sem úrtaksstærðin er stór ($n > 30$) veitir dreifni úrtaksins þó góða nálgun á dreifni þýðisins og megum við því einnig nota z-próf og öryggisbil í því tilviki. Til að draga þetta saman megum við framkvæma z-próf til að draga ályktanir um meðaltöl þegar:

- Þýðið fylgir normaldreifingu og við gerum ráð fyrir að við þekkjum dreifni þess.
- Úrtakið er stórt.

Í þessum tilvikum má nota eftirfarandi öryggisbil fyrir hið óþekkta meðaltal þýðisins:

8.4. Z - öryggisbil fyrir μ
Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{8.5}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \tag{8.6}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \tag{8.7}$$

þar sem $\bar{x}$ er meðaltal úrtaksins og σ er staðalfrávik þýðisins. $z_{1-\alpha/2}$ gildið má finna í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260 - 263.

Eins og fram kom hér að ofan veitir dreifni úrtaksins góða nálgun á dreifni þýðisins þegar úrtakið er stórt. Þegar n er stórt má því skipta σ út fyrir s í formúlunum hér að ofan. Samsvarandi tilgátupróf má framkvæma með:

8.5. Z-próf fyrir μ
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \tag{8.8}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0,1)$.

Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Að sama skapi og hér að ofan má skipta σ út fyrir s þegar n er stórt.

Sýnidæmi 8.3: Ályktanir um meðaltal
Jón rekur fiskvinnslu á Bíldudal sem verkar þorsk til sölu á Bretlandseyjum. Þorskurinn er sendur út í um 50 kg. pakkningum. Þar á bæ hafa menn fylgst grannt með þyngd pakkanna og komist að því að þyngd þeirra fylgir normaldreifingu með σ^2 = 0.8 kg. Við höfum nú áhuga á að draga ályktanir um μ. Til þess er tekið slembiúrtak af stærð $n = 12$ og meðalþyngd úrtaksins reiknuð, 50.84 kg. Finnið 95% öryggisbil fyrir μ og kannið hvort meðalþyngd pakkanna sé frábrugðin 50 kg. Notið $\alpha = 0.05$.

Fengum upp gefið að: $\bar{x} = 50.84$, $n = 12$, $\sigma^2 = 0.8$. Neðri mörk öryggisbilsins reiknum við með jöfnu (8.5). Við þurfum að því að byrja á að finna $z_{1-\alpha/2}$. $z_{1-\alpha/2} = z_{1-0.05/2} = z_{0.975} = 1.96$.

$$\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50.84 - 1.96 \cdot \frac{\sqrt{0.8}}{\sqrt{12}} = 50.84 - 0.506 = 50.33$$

og efri mörk öryggisbilsins með jöfnu (8.6)

$$\bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 50.84 + 0.506 = 51.35.$$

Öryggisbilið má þá skrifa sem

$$50.33 < \mu < 51.35$$

Til að kanna hvort meðalþyngd pakkanna sé frábrugðin 50 kg. förum við eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um μ og notum því próf fyrir meðaltal þýðis. Gefið er upp að þýðið fylgi normaldreifingu með þekktri dreifni og getum við því notað z-próf.

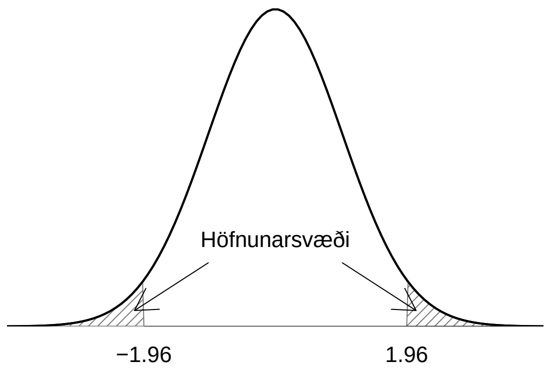
2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.
3. Við eigum að kanna hvort meðalþyngd pakkanna sé **frábrugðin** 50 kg. Það gerum við með tvíhliða prófi. Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu = 50 \\ H_1 &: \mu \neq 50 \end{aligned}$$

4. Fengum upp gefið að: $\bar{x} = 50.84$, $n = 12$, $\sigma^2 = 0.8$. Prófstærðina reiknum við með jöfnu (8.8) og fáum

$$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{50.84 - 50}{\sqrt{0.8}/\sqrt{12}} = 3.25.$$

5. Við notum töflu stöðluðu normaldreifingarinnar til að finna höfnunarsvæðin og fáum $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $z < -1.96$ eða $z > 1.96$. Við sjáum að $z > 1.96$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.
6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum að meðalþyngd kassanna sé frábrugðin 50 kg.



Sýnidæmi 8.4: Ályktanir um μ
Gúgú er forstjóri í stóru fyrirtæki sem framleiðir bíla. Hún fullyrðir að bílategund nokkur geti keyrt að meðaltali 20 km. á lítra. Allmargar kvartanir hafa borist til Ingibjargar, formanns Neytendasamtakanna, vegna þessarar fullyrðingar og vill fólk meina að það nái alls ekki að keyra 20 km. á lítra. Neytendasamtökin

framkvæmdu því tilraun til að sýna fram á að meðalfjöldi kílómetra á lítra væru færri en 20. Slembiúrtak af stærð 40 var tekið og meðaltal þess reiknað sem 19.2 og staðalfrávik úrtaksins reiknað sem 1.7. Notið viðeigandi tilgátupróf til að kanna hvort meðalfjöldi kílómetra á lítra séu færri en 20 með því að kanna hvort prófstærðin falli á höfnunarsvæði en einnig með að kanna p-gildi tilgátuprófsins. Notið $\alpha = 0.05$.

Förum eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um μ og notum því próf fyrir meðaltal þýðis. Við þekkjum hvorki líkindadreifingu né dreifni þýðisins en úrtakið er stórt svo við getum notað z-próf.

2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.

3. Við eigum að kanna hvort meðalkílómetra fjöldi sé færri en 20 km en þar sem að fjöldinn getur í raun verið hærri en 20 km notum við tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \mu = 20 \\
H_1 &: \mu \neq 20
\end{aligned}
$$

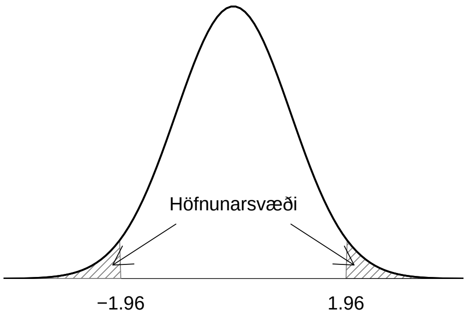
4. Við fengum upp gefið að $\bar{x} = 19.2$, $s = 1.7$, $n = 40$. Við reiknum prófstærðina með jöfnu (8.8) en skiptum σ út fyrir s:

$$
z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{19.2 - 20}{1.7/\sqrt{40}} = -2.98.
$$

5a. Við notum töflu stöðluðu normaldreifingarinnar til að finna höfnunarsvæðið: $z_{1-\alpha/2} = z_{0.975} = 1.96$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $z < -1.96$ eða $z > 1.96$. Við sjáum að $z < -1.96$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

5b. Við notum töflu stöðluðu normaldreifingarinnar til að finna p-gildið. Gildið á prófstærðinni er -2.98 svo við finnum z= -2.98 í töflunni og lesum 0.0014. Þar sem tilgátuprófið er tvíhliða margföldum við p-gildið með 2 og fáum að p-gildið er 0.0028. Þar sem p-gildið er minna en α höfnum við núlltilgátunni.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum að meðalfjöldi kílómetra er lægri en 20 á lítrann.



T-próf og öryggisbil
Rifjum nú aftur upp að þegar við vinnum með normaldreift þýði, þá fylgir úrtaksdreifing meðaltalsins alltaf normaldreifingu, sama hversu lítið úrtakið er. Hins vegar er eitt vandamál við að framkvæma z-próf í því tilviki, nefnilega það að matið á staðalfrávikinu verður ekki lengur eins áreiðanlegt og því þurfum við að taka tillit til óvissunnar í því mati.

Þegar þýðið fylgir normaldreifingu og við deilum í úrtaksdreifingu meðaltalsins með $s^2/\sqrt{n}$ fylgir útkoman þekktri líkindadreifingu, nefnilega *t-dreifingu* (sjá kafla 5.4.2). T-dreifingin hefur mjög svipaða lögun og normaldreifingin en hefur örlítið *þyngri hala* (meiri líkur á að fá mjög stór eða mjög lítil gildi). Því eru minni líkur á villu af gerð I þegar t-próf, í stað z-prófs, er framkvæmt á sömu gögnunum. Því er ætíð óhætt að nota t-próf þegar z-próf á líka við og þar af leiðandi er t-próf útfært í öllum helstu tölfræðihugbúnuðum en z-próf síður.

Til að draga saman, megum við nota t-próf og öryggisbil byggð á t-dreifingu þegar:

- Þýðið fylgir normaldreifingu, óháð stærð úrtaksins.
- Úrtakið er stórt.

Í þessum tilvikum má notast við eftirfarandi öryggisbil:

8.6. T-öryggisbil fyrir μ
Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{8.9}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils:

$$\bar{x} + t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}. \tag{8.10}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x} - t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + t_{1-\alpha/2,(n-1)} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \tag{8.11}$$

þar sem $\bar{x}$ og s eru meðaltal og staðalfrávik úrtaksins. $t_{1-\alpha/2,(n-1)}$ gildið má finna í t-töflu á blaðsíðu 264.

og eftirfarandi tilgátupróf:

8.7. T-próf fyrir μ
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu = \mu_0$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \tag{8.12}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með $(n-1)$ frígráðu, eða $T \sim t_{(n-1)}$.

Höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu < \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu > \mu_0$	$T > t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu \neq \mu_0$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n-1)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n-1)}$

Sýnidæmi 8.5: Ályktanir fyrir μ
Sígarettuframleiðandi nokkur fullyrðir að nikótíninnihald í ákveðinni tegund af sígarettum sé að meðaltali 14 mg/sígarettu. Heilbrigðisyfirvöld í viðkomandi landi héldu því fram að nikótíninnihaldið væri að meðaltali hærra. Þau stóðu því fyrir tilraun til að sýna fram á að meðalinnihald nikótíns væri hærra en 14 mg/sígarettu. Slembiúrtak af stærð 12 var tekið og meðaltal úrtaksins reiknað sem 14.3 og staðalfrávik þess 0.9. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort meðalinnihald nikótíns sé hærra en 14 mg/sígarettu. Notið $\alpha = 0.05$. Gera má ráð fyrir að nikótíninnihald í sígarettum fylgi normaldreifingu.

Förum nú eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um μ og notum því próf fyrir meðaltal þýðis. σ^2 er óþekkt og n er lítið en þar sem við getum gert ráð fyrir að þýðið sem úrtakið er tekið úr fylgi normaldreifingu getum við notað t-próf.

2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.

3. Við eigum að kanna hvort meðalinnihald nikótíns sé hærra en 14 mg/sígarettu en þar sem það getur í raun verið lægra notum við tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

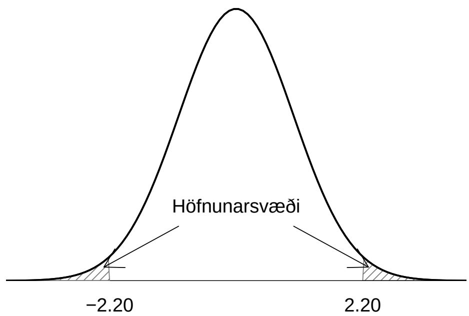
$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \mu = 14 \\ H_1 &: \quad \mu \neq 14 \end{aligned}$$

4. Við fáum upp gefið: $n = 12,\ \bar{x} = 14.3,\ s = 0.9$. Við reiknum prófstærðina með jöfnu (8.12) og fáum

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{14.3 - 14}{0.9/\sqrt{12}} = 1.15.$$

5. Við notum t-töfluna til að finna höfnunarsvæðið og flettum upp eftir $n - 1 = 11$ frígráðum: $t_{1-\alpha/2,(n-1)} = t_{0.975,(11)} = 2.20$. Við höfnum því núlltilgátunni ef $t < -2.20$ eða $t > 2.20$. Við sjáum að prófstærðin fellur ekki á höfnunarsvæði.

6. Við getum ekki hafnað núlltilgátunni og getum því ekki ályktað að meðalnikótíninnihaldið sé hærra en 14 mg/sígarettu.



8.2.2. Ályktanir um meðaltöl tveggja óháðra þýða

Nú er komið að því að fjalla um tilgátupróf og öryggisbil sem eiga við þegar bera á saman meðaltöl tveggja óháðra þýða. Við köllum meðaltölin μ_1 og μ_2 og viljum draga ályktanir um mismun þeirra, $\mu_1 - \mu_2$. Próf af þessu tagi mundum við nota ef við viljum t.d bera saman meðalhæð karla og kvenna og ef við viljum bera saman meðalfjölda gistinátta í júlí og ágúst .

Í þessum hluta er núlltilgátan ávallt sú sama, þ.e. hvort mismunur meðaltalanna tveggja sé jafn einhverju ákveðnu gildi sem við köllum δ. Hana ritum við $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$. Takið eftir að δ er gríski bókstafurinn sem svarar til latneska bókstafsins d samanber enska orðið difference. Það er í samræmi við notkun okkar, við viljum yfirleitt sýna að munurinn á meðaltölum hópanna tveggja sé frábrugðinn δ. Algengast er að nota $\delta = 0$ en þá viljum við einfaldlega sýna að það sé munur á milli hópanna. Núlltilgátan er þá eftirfarandi: „Eru meðaltöl þýðanna tveggja jöfn? “

Líkt og þegar við viljum draga ályktanir um eitt meðaltal geta aðstæður verið mismunandi. Við munum eins og áður notast við z-próf/öryggisbil og t-próf/öryggisbil og má sjá hér að neðan hvenær þau eiga við.

Z-próf og öryggisbil

Svipað og við lýstum í kafla 8.2.1 er mismunur tveggja meðaltala normaldreifður ef þýðið sem hvort meðaltal fyrir sig er fengið úr er einnig normaldreift. Sömuleiðis leiðir Höfuðsetning tölfræðinnar af sér að það sama gildir ef að úrtakið er nógu stórt.

Ef að við vissum hver dreifni þýðanna væri, gætum deilt í mismun meðaltalanna með dreifni hans til að fá út staðlaða normaldreifða stærð. Í þessu tilviki er dreifni mismunarins stærðin $\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$. Einnig gildir að ef úrtökin eru nægjanlega stór veitir dreifni úrtakanna það gott mat á dreifni þýðanna að hana má nota í staðinn. Hér er oft miðað við að hvort úrtak þurfi að vera að minnsta kosti af stærð 30 til að nægjanlegur fjöldi sé fyrir hendi.

Þar af leiðandi er í textanum gert ráð fyrir að dreifni þýðanna, þ.e. σ_1^2 og σ_2^2, sé þekkt, þó svo að sú sé sjaldnast ekki raunin. Við þekkjum yfirleitt aðeins dreifni úrtakanna, s_1^2 og s_2^2, sem við reiknum út frá gögnunum okkar. Til að draga þetta saman megum við nota z-próf og öryggisbil byggð á normaldreifingu þegar:

- Þýðin fylgja normaldreifingu og við gerum ráð fyrir að við þekkjum dreifni þýðanna.
- Úrtökin eru stór.

Í þessum tilvikum má nota eftirfarandi öryggisbil fyrir mismun meðaltala þýðanna:

8.8. Z-öryggisbil fyrir mismun tveggja meðaltala
Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{8.13}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{8.14}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \tag{8.15}$$

þar sem $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ eru meðaltöl úrtakanna og σ_1^2, σ_2^2 eru dreifni þýðanna. $z_{1-\alpha/2}$ má finna í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar á blaðsíðum 260 - 263.

Eins og fram kom hér að ofan veitir dreifni úrtaks góða nálgun á dreifni þýðisins þegar úrtakið er stórt. Þegar n_1 og n_2 eru stór má því skipta σ_1 og σ_2 út fyrir s_1 og s_2 í formúlunum hér að ofan. Þegar framkvæma á samsvarandi tilgátupróf má notast við eftirfarandi:

8.9. Z-próf fyrir mismun tveggja meðaltala
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

Prófstærðin er:

$$Z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \tag{8.16}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni, eða $Z \sim N(0,1)$.

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$Z < -z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$Z > z_{1-\alpha}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$Z < -z_{1-\alpha/2}$ eða $Z > z_{1-\alpha/2}$

Athugið að δ getur verið hvaða tala sem er en í mörgum tilvikum er $\delta = 0$.

Eins og áður má skipta skipta σ_1 og σ_2 út fyrir s_1 og s_2 þegar n_1 og n_2 eru stór.

Sýnidæmi 8.6: $\mu_1 - \mu_2$
Hænsnabóndi nokkur hefur fylgst vel með þyngd unga við fæðingu. Hænsnabóndi þessi hefur áhuga á að kanna hvort munur sé á þyngd unganna eftir kyni og til að rannsaka það valdi hann 35 karlkyns unga og 35 kvenkyns unga og viktaði þá. Kvenkyns ungarnir vógu að meðaltali 212 grömm og var staðalfrávikið 21 grömm. Karlkyns ungarnir vógu að meðaltali 220 grömm og var staðalfrávikið 26 grömm. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á þyngd unganna eftir kyni.

Förum nú eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um mun á meðaltölum tveggja þýða. Úrtökin eru **óháð**. Ekki er tekið fram að gera megi ráð fyrir að þyngdin fylgi normaldreifingu, við þekkjum ekki dreifni þýðanna en n-in okkar eru stór og því megum við nota z-próf.

2. Notum $\alpha = 0.05$.

3. Við ætlum að kanna hvort **munur** sé á meðalþyngd unga eftir kyni og notum við til þess tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 &: \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{aligned}$$

4. Prófstærðina reiknum við með jöfnu (8.16) en skiptum út σ_1 og σ_2 með s_1 og s_2:

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

   Við vitum að $n_1 = 35$, $n_2 = 35$, $\bar{x}_1 = 220$, $s_1 = 26$, $\bar{x}_2 = 212$, $s_2 = 21$ og $\delta = 0$ (við látum karlkyns ungana vera þýði 1 og kvenkyns ungana vera þýði 2). Við setjum þessar tölur inn í jöfnuna og fáum

$$z = \frac{220 - 212 - 0}{\sqrt{\frac{26^2}{35} + \frac{21^2}{35}}} = 1.42$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess z-töflu. Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin stöðluðu normaldreifingunni: $z_{1-\alpha/2,} = z_{0.975} = 1.96$, svo við höfnum núlltilgátunni ef $z > 1.96$ eða $z < -1.96$. Við sjáum að hvorugt gildir svo prófstærðin fellur ekki á höfnunarsvæði.

6. Við getum ekki hafnað núlltilgátunni svo við drögum enga ályktun.

T-próf og öryggisbil

Á sama hátt og við lýstum í kafla 8.2.1 er mismunur tveggja meðaltala normaldreifður ef þýðið sem hvort meðaltal fyrir sig er fengið úr er einnig normaldreift. Við getum skalað mismuninn til með því að deila með dreifninni á úrtaksdreifingu mismuns meðaltalanna og þá fylgir útkoman *t-dreifingu* (sjá kafla 5.4.2), alveg eins og í tilvikinu með eitt meðaltal. Þar sem t-dreifing hefur þyngri hala en normaldreifing er ætíð óhætt að nota t-próf þegar z-próf á líka við og þar af leiðandi er t-próf útfært í öllum helstu tölfræðihugbúnuðum en z-próf síður.

Við megum því nota t-próf og öryggisbil byggð á t-dreifingu þegar:

- Þýðin fylgja normaldreifingu, óháð stærð úrtakanna.
- Úrtökin eru stór.

Við notum ólíka formúlu til að meta dreifnina á mismun meðaltal þýðanna eftir því hvort við megum gera ráð fyrir því að dreifnin sé jöfn í þýðunum tveimur eða ekki. Þar af leiðandi verða t-prófin og öryggisbilin sem nota má til að kanna ályktanir um mismun tveggja óháðra þýða tvenns konar. Annað prófið notum við þegar gera má ráð fyrir að dreifni þýðanna er jöfn en hitt þegar svo er ekki. Takið efir að hér þekkjum við ekki dreifni þýðanna en við getum notað tilgátupróf fyrir dreifni tveggja þýða (sjá kassa 8.3) til að skera úr um hvort dreifni þýðanna sé það ólík að ekki sé hægt að gera ráð fyrir að hún sé sú sama.

Ef gera má ráð fyrir að dreifni þýðanna sé jöfn þurfum við að reikna út svokallaða *vegna dreifni* (pooled variance) úrtakanna sem við táknum s_p^2 áður en við getum reiknað öryggisbil og kannað tilgátur:

$$s_p^2 = \frac{(n_1-1)s_1^2+(n_2-1)s_2^2}{n_1+n_2-2}. \tag{8.17}$$

þar sem s_1^2 og s_2^2 eru dreifni úrtakanna.

Öryggisbilið má svo smíða með:

8.10. T-öryggisbil fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - gert er ráð fyrir að dreifnin sé sú sama

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2-t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \tag{8.18}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1-\bar{x}_2+t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}\cdot s_p\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \tag{8.19}$$

þar sem $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ er meðaltöl úrtakanna og s_1^2, s_2^2 er dreifni úrtakanna. $t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}$ má finna í t-töflu á blaðsíðu 264.

og framkvæma tilgátuprófið með:

8.11. T-próf fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - gert er ráð fyrir að dreifnin sé sú sama

Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \tag{8.20}$$

þar sem s_p er reiknað með jöfnu (8.17). Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t dreifingu með $(n_1 + n_2 - 2)$ frígráður, eða $T \sim t_{(n_1+n_2-2)}$. Gagntilgáturnar og höfnunarsvæðin eru:

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$T < -t_{1-\alpha,(n_1+n_2-2)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$T > t_{1-\alpha,(n_1+n_2-2)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)}$

Athugið að δ getur verið hvaða fasti sem er en í mörgum tilvikum er $\delta = 0$.

Ef við getum ekki gert ráð fyrir að dreifnin í hópunum sé sú sama notum við annars konar t-próf og öryggisbil. Við þurfum ekki að byrja á að reikna út vegna dreifni en fjöldi frígráða í t-dreifingunni sem við notum er ekki $n_1 + n_2 - 2$ eins og áður heldur táknum við þær með ν og reiknum með

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2-1}} \tag{8.21}$$

Öryggisbilið má svo smíða með:

8.12. T-öryggisbil fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - ólík dreifni
Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{8.22}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{8.23}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} < \mu_1 - \mu_2 < \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + t_{1-\alpha/2,(\nu)} \cdot \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \tag{8.24}$$

þar sem $\bar{x}_1$ og $\bar{x}_2$ eru meðaltöl úrtakanna og s_1^2 og s_2^2 eru dreifni úrtakanna. $t_{1-\alpha/2,(\nu)}$ má finna í t-töflu á blaðsíðu 264. Fjöldi frígráða í t-dreifingunum, ν er reiknað með jöfnu (8.21).

og tilgátuprófið má framkvæma með:

8.13. T-próf fyrir mismun meðaltala tveggja þýða - ólík dreifni
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = \delta$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \tag{8.25}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með ν frígráðum eða $T \sim t(\nu)$ þar sem ν er reiknað með jöfnu (8.21).

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 < \delta$	$T < -t_{1-\alpha,(\nu)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 > \delta$	$T > t_{1-\alpha,(\nu)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq \delta$	$T < -t_{1-\alpha/2,(\nu)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(\nu)}$

Athugið að δ getur verið hvaða fasti sem er en í mörgum tilvikum er $\delta = 0$.

Sýnidæmi 8.7: Ályktanir um tvö meðaltöl
Skoðum nú aftur dæmi 8.2. Þar framkvæmdum við tilgátupróf til að kanna hvort dreifni launa milli kynja væri misjöfn. Nú vilja Ingunn og Árni kanna hvort munur sé á meðallaunum karla og kvenna sem starfa við kjötvinnslu.

Við rifjum upp að Jafnréttisstofa stóð fyrir rannsókn þar sem að slembiúrtök voru tekin úr báðum þýðum, 20 karlar og 20 konur. Meðaltal og staðalfrávik launa í karla úrtakinu voru 245163 kr og 22814. Í konu úrtakinu voru meðaltal og staðalfrávik 218634 og 18312. Kannið nú með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á meðallaunum karla og kvenna sem starfa við kjötvinnslu. Notið $\alpha = 0.05$. Gera má ráð fyrir að laun í báðum þýðum fylgi normaldreifingu.

Förum nú eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um mun á meðaltölum tveggja þýða. Úrtökin eru **óháð**. Gera má ráð fyrir að launin séu normaldreifð. Við þekkjum ekki dreifni þýðanna en gerum ráð fyrir að hún sé jöfn (sjá dæmi 8.2).

2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.

3. Við ætlum að kanna hvort **munur** sé á meðallaunum karla og kvenna og notum við til þess tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 &: \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{aligned}$$

4. Prófstærðina reiknum við með jöfnu (8.20):

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{s_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

   þar sem s_p^2 er reiknað samkvæmt jöfnu 8.17

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

   Við vitum að $n_1 = 20$, $n_2 = 20$, $\bar{x}_1 = 245163$, $s_1 = 22814$, $\bar{x}_2 = 218634$, $s_2 = 18312$ og $\delta = 0$. Við setjum þessar tölur inn í jöfnurnar og fáum

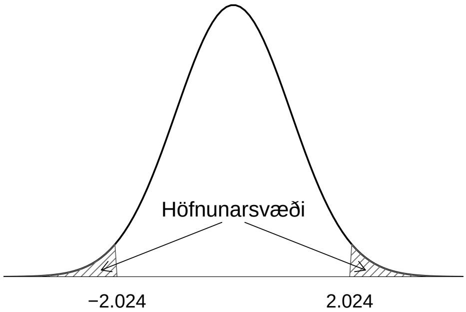
$$s_p = \sqrt{\frac{(20-1)\cdot 22814^2 + (20-1)\cdot 18312^2}{20+20-2}} = 20685.84$$

   og

$$t = \frac{245163 - 218634 - 0}{20685.84\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{1}{20}}} = 4.06.$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess t-töflu. Við flettum upp eftir $n_1 + n_2 - 2 = 38$. $t_{1-\alpha/2,(n_1+n_2-2)} = t_{0.975,(38)}$ = 2.024, svo við höfnum núlltilgátunni ef $t > 2.024$ eða $t < -2.024$. Við sjáum að $t > 2.024$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum að meðallaun karla og kvenna sem starfa í kjötiðnaði séu ekki jöfn.



Sýnidæmi 8.8: Ályktanir um tvö meðaltöl
Hópur líffræðinga sem er að bera saman þyngd silunga í vötnum á Íslandi veiddi 51 silung í Þingvallavatni og reyndist meðalþyngd þeirra vera 550 grömm og staðalfrávikið 65 grömm. Hópurinn veiddi auk þess 60 silunga í Úlfljótsvatni og var meðalþyngd þeirra 522 grömm og staðalfrávikið 30 grömm. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á meðalþyngd fiska í vötnunum tveimur. Gera má ráð fyrir að þyngd silunga fylgi normaldreifingu.

Við þekkjum hvorki dreifni þýðanna né dreifingu þeirra en úrtökin eru stór. Við getum því notað t-próf. Við byrjum á að kanna hvort gera megi ráð fyrir að dreifnin í hópunum sé sú sama áður en við veljum viðeigandi t-próf.

Förum eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að kanna tilgátu um dreifni tveggja normaldreifðra þýða.

2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.

3. Við ætlum að kanna hvort dreifni þýðanna er mismunandi og notum við því tvíhliða próf.

Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \\ H_1 &: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \end{aligned}$$

4. Prófstærðin er:

$$F = \frac{S_M^2}{S_m^2}.$$

Þar sem staðalfrávik í Þingvalla úrtakinu er hærra köllum við Þingvalla hópinn hóp M og Úlfljótsvatns hópinn hóp m. Setjum nú inn í prófstærðina og fáum

$$f = \frac{65^2}{30^2} = 4.69.$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess F-töflu. $F_{1-\alpha/2,(n_M-1,n_m-1)} = F_{0.975,(50,59)}$. Sé F-taflan á blaðsíðu 268 skoðuð má sjá að þar er ekki að finna gildi fyrir $F_{0.975,(50,59)}$ og notum við því það sem er næst, $F_{0.975,(\infty,60)} = 1.482$, svo við höfnum núlltilgátunni ef $f > 1.482$. Við sjáum að $f > 1.482$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við getum höfnað núlltilgátunni ályktað að dreifnin sé mismunandi.

Þá erum við tilbúin til að kanna mismun meðaltalanna og förum við eftir samantekt um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um mun á meðaltölum tveggja þýða. Úrtökin eru **óháð**. Gera má ráð fyrir að þyngdin fylgi normaldreifingu. Við þekkjum ekki dreifni þýðanna og getum ekki gert ráð fyrir að hún sé jöfn. Við framkvæmum því t-próf fyrir ólíka dreifni.

2. Notum $\alpha = 0.05$.

3. Við ætlum að kanna hvort **munur** sé á meðalþyngd silunga í Þingvallavatni og Úlfljótsvatni og notum við til þess tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ H_1 &: \mu_1 - \mu_2 \neq 0. \end{aligned}$$

4. Prófstærðina reiknum við með jöfnu (8.25):

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Við vitum að $n_1 = 51$, $n_2 = 60$, $\bar{x}_1 = 550$, $s_1 = 65$,
$\bar{x}_2 = 522$, $s_2 = 30$ og $\delta = 0$. Við setjum þessar tölur inn í jöfnurnar og fáum

$$t = \frac{550 - 522 - 0}{\sqrt{\frac{65^2}{51} + \frac{30^2}{60}}} = 2.83$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess t-töflu. Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með ν frígráður. ν reiknum við með jöfnu (8.21):

$$\nu = \frac{\left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}\right)^2}{\frac{(s_1^2/n_1)^2}{n_1 - 1} + \frac{(s_2^2/n_2)^2}{n_2 - 1}} = 67.9.$$

Sé t-taflan skoðuð má sjá að næsta gildi sem við höfum er fyrir 60 frígráður, við notum það gildi. $t_{1-\alpha/2,\nu} = t_{0.975,(60)} = 2$, svo við höfnum núlltilgátunni ef $t > 2$ eða $t < -2$. Við sjáum að $t > 2$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum að meðalþyngd silunga í vötnunum tveimur sé ekki sú saman.

8.2.3. Tilgátupróf fyrir paraðar mælingar

Margar rannsóknir eru gerðar á pöruðum slembiúrtökum eins og við kynntum í kassa 2.4.2 í kafla 2. Þær rannsóknir eru oftar en ekki þannig að gögnum er aflað fyrir og eftir eitthvert inngrip. Tilgáturnar ganga þá iðulega út á að kanna hvort inngripið hafi borið árangur. Við notum parað próf til að kanna þessar tilgátur.

Gerum nú ráð fyrir að við höfum n pör mælinga (X_i, Y_i), $i = 1, 2, 3 \ldots n$. Það fyrsta sem við þurfum að gera er að finna mismun þessara pöruðu mælinga,

$$D_i = X_i - Y_i. \tag{8.26}$$

Við lítum á D_i sem slembiúrtak af stærð n úr þýði með meðaltal μ_D. Tilgátuprófin ganga út á að kanna μ_D. Áður en við getum hafist handa við tilgátuprófin þurfum við að reikna eftirfarandi stærðir:

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^{n} D_i}{n} \tag{8.27}$$

sem er meðaltal mismunanna og

$$S_D{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (D_i - \overline{D})^2}{n - 1} \tag{8.28}$$

sem er dreifni mismunanna.

Tilgátuprófin í þessum hluta prófa núlltilgátuna, hvort meðaltal mismuns pöruðu mælinganna sé jafnt einhverju ákveðnu gildi sem við köllum $\mu_{D,0}$. Núlltilgátuna ritum við $H_0 : \mu_D = \mu_{D,0}$. Algengast er að nota $\mu_{D,0} = 0$ en þá er núlltilgátan einfaldlega: „Eru pöruðu mælingarnar að meðaltali jafnar? “.

Líkt og áður eru notuð z-próf eða t-próf. Mun algengara er að nota t-próf og munum við sýna það hér. Ef ekki er hægt að gera ráð fyrir að mismunur mælinganna okkar fylgi normaldreifinu og mælingarnar okkar eru fáar er hvorki hægt að framkvæma z- né t-próf. Þá þarf að grípa til annarra aðferða, svo sem *stikalausra prófa* eða *endurvalsaðferða*, en ekki verður fjallað um það nánar hér.

Fylgir mismunur mælinganna okkar normaldreifingu og/eða ef úrtakið er stórt getum við notað eftirfarandi t-próf:

8.14. T-próf fyrir paraðar mælingar
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \mu_D = \mu_{D,0}$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{\overline{D} - \mu_{D,0}}{S_D/\sqrt{n}} \tag{8.29}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t-dreifingu með $(n-1)$ frígráðu, eða $T \sim t_{(n-1)}$.

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$\mathrm{H}_1 : \mu_D < \mu_{D,0}$	$T < -t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_D > \mu_{D,0}$	$T > t_{1-\alpha,(n-1)}$
$\mathrm{H}_1 : \mu_D \neq \mu_{D,0}$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n-1)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n-1)}$

$t_{1-\alpha/2,(n-1)}$ má finna í t-töflu á blaðsíðu 264.

Sýnidæmi 8.9: Ályktanir um paraðar mælingar
Lýðheilsustöð ákvað að standa fyrir rannsókn til að kanna hvort miðaldra menn sem eru yfir kjörþyngd geti lést á tveimur mánuðum hreyfi þeir sig í 30 mínútur dag hvern. Til að kanna það var slembiúrtak tekið af stærð 6. Þyngd mannanna var mæld í upphafi átaksins og aftur í lok átaksins, tveimur mánuðum síðar. Mælingarnar má sjá hér að neðan. Kannið nú með viðeigandi tilgátuprófi hvort miðaldra menn sem eru yfir kjörþyngd geti að meðaltali lést á tveimur mánuð-

um hreyfi þeir sig í 30 mínútur dag hvern. Gera má ráð fyrir að þyngd fylgi normaldreifingu. Notið $\alpha = 0.05$.

Maður númer	Þyngd fyrir [kg]	Þyngd eftir [kg]
1	123	120
2	112	108
3	107	106
4	101	99
5	112	112
6	116	114

Áður en við hefjumst handa þurfum við að reikna D_i, $\overline{D}$ og S_D. Bætum nú við dálki í töfluna, d. (við notum d þar sem það eru mælingar á D).

Maður númer	Þyngd fyrir (x_i)	Þyngd eftir (y_i)	$d_i = x_i - y_i$
1	123	120	3
2	112	108	4
3	107	106	1
4	101	99	2
5	112	112	0
6	116	114	2

Reiknum nú meðaltal mismunanna með jöfnu (8.27)

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{n} = \frac{3+4+1+2+0+2}{6} = 2$$

og dreifni mismunanna með jöfnu (8.28)

$$s_d{}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2}{n-1} = \frac{(3-2)^2 + (4-2)^2 + \ldots + (2-2)^2}{5} = 2.$$

Förum nú eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við höfum **paraðar** mælingar þar sem n er lítið en gera má ráð fyrir normaldreifðum þýðum. Við notum því parað t-próf.

2. Við fengum uppgefið að nota $\alpha = 0.05$.

3. Við viljum sýna fram á að fólkið léttist en þar sem að fólkið gæti í raun verið að þyngjast notum við tvíhliða próf. Tilgáturnar eru:

$$\begin{aligned} H_0 &: \mu_D = 0 \\ H_1 &: \mu_D \neq 0 \end{aligned}$$

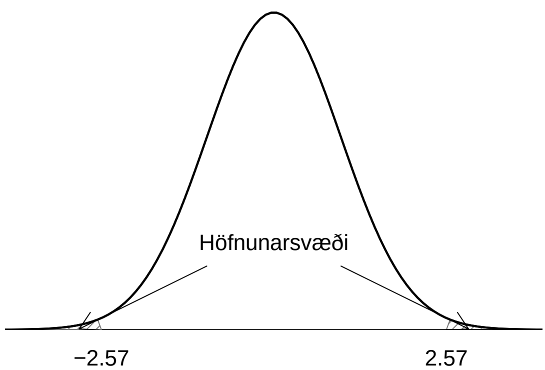
(munið að við reiknuðum $d = \text{fyrir} - \text{eftir}$.)

4. Prófstærðina reiknum við með jöfnu 8.29

$$t = \frac{\overline{d} - \mu_{D,0}}{s_D/\sqrt{n}} = \frac{2-0}{\sqrt{2/6}} = 3.46.$$

5. Við notum t-töfluna til að finna höfnunarsvæðin og flettum upp eftir $n-1=5$ frígráðum: $t_{1-\alpha/2,(n-1)} = t_{0.975,5}$ = 2.57, svo við höfnum núlltilgátunni ef $t < -2.57$ eða $t > 2.57$. Við sjáum að $t > 2.57$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum að það að hreyfa sig í 30 mínútur á dag í tvo mánuði ber árangur í baráttunni við aukakílóin fyrir miðaldra menn yfir kjörþyngd.



8.2.4. Hvenær notum við hvaða próf?

Við höfum nú fjallað um ályktanir fyrir meðaltal í einu þýði, mismun óháðra meðaltala og mismun paraðra mælinga. Í öllum tilvikum getum við notað z-próf/öryggisbil eða t-próf/öryggisbil við verkið. Tökum nú stuttlega saman hvenær hvor dreifing á við.

Z-próf má nota þegar:

- Þýðin fylgja normaldreifingu og við gerum ráð fyrir að við þekkjum dreifni þýðanna.
- Úrtökin eru stór, óháð því hver dreifing þýðanna er.

t-próf má nota þegar:

- Þýðin fylgja normaldreifingu, sama hversu lítil úrtökin eru.
- Úrtökin eru stór, óháð því hver dreifing þýðanna er.

Þegar úrtökin eru stór hafa t-dreifingin og z-dreifingin nánast sömu lögun og þá verða prófin/öryggisbilin tvö nánast jafngild. Þar sem t-dreifingin hefur þyngri hala en normaldreifingin er erfiðara að hafna núlltilgátunni í því tilviki og þar af leiðandi minni hætta á villu af gerð eitt. Því er ívið varfærnara að nota t-prófið/öryggisbilið og þar að auki eru t-próf innbyggð í flest tölfræðiforrit, ólíkt z-prófum, enda mun algengari.

Eins og þið sjáið er eina tilvikið sem stendur eftir þegar úrtökin eru lítil og ekki er hægt að gera ráð fyrir að þýðin fylgi normaldreifingu. Í þeim tilvikum er stundum hægt að *umbreyta* (transform) gögnunum, nota *endurvalsaðferðir* (resampling methods) eða nota *stikalaus próf* (nonparametric tests) en ekki verður farið nánar í það hér.

Að lokum viljum við ítreka það að gæta vel að því hvenær við höfum í höndunum *paraðar* mælingar og hvenær við könnum *tvö óháð* þýði. Í hvert sinn sem við höfum innbyggða pörun fyrir hendi, þannig að við getum með eðlilegum hætti reiknað mismun hvers pars og dregið ályktanir um það, fæst meiri styrkur með því að nota tilgátupróf fyrir paraðar mælingar og því skyldi það alltaf notað. Ef að hins vegar engin eðlileg pörun er fyrir hendi er sá samanburður á sandi byggður. Í því tilviki þegar mælingarnar eru mismargar grípa tölfræðiforritin oft þá villu og vara okkur við. Ef ekki, erum við að gefa okkur forsendur sem gilda ekki og líkurnar á villu af gerð I verða hærri en við höldum.

Dæmi

Dæmi 8.1
Gera má ráð fyrir að hitastig á hádegi í júlí á ákveðnum stað á landinu fylgi normaldreifingu. Ferðamálfræðingur nokkur hefur mikinn áhuga á að meta stikana í þessari dreifingu og valdi hann tilviljunarkennt einn dag í júlí síðustu átta ár og skráði hitastigið. Hann reiknaði meðaltal og staðalfrávik mælinganna átta og fékk út að meðaltalið var 14.7 gráður og staðalfrávikið 5.6 gráður. Finnið 95 % öryggisbil fyrir dreifnina.

Dæmi 8.2
Láki landfræðingur vill kanna hvort munur sé á dreifni í tveimur normaldreifðum þýðum sem hann er að kanna. Til þess tók hann úrtök úr þýðunum, bæði af stærð 18. Hann reiknaði staðalfrávik úrtakanna og fékk út að staðalfrávikið í því fyrra var 21.43 og í því seinna 32.18. Hvert er gildið á prófstærðinni sem nota á til að kanna að munur sé á dreifni þýðanna tveggja?

Dæmi 8.3
Finnur ferðamálafræðingur er að kanna hversu mikið ferðamenn eru tilbúnir til að greiða fyrir að fá að sjá Gullfoss. Hann valdi af handahófi 20 ferðamenn og reiknaði að ferðamennirnir 20 voru tilbúnir að greiða 1243 krónur að meðaltali og var staðalfrávikið 126 krónur. Gera má ráð fyrir að upphæðin sem ferðamenn eru tilbúnir til að greiða fylgi normaldreifingu. Hvert er efra mark 95% öryggisbils fyrir dreifni upphæðarinnar sem ferðamenn eru tilbúnir til að greiða?

Dæmi 8.4
Fuglavinafélagið fylgist náið með þyngd stokkanda við tjörnina og fullyrða vísindamenn innan félagsins að þyngd andanna fylgi normaldreifingu. Félagið ákvað að skoða hvort dreifni þyngdar stokkandarsteggja og stokkandakolla sé misjöfn og mældi því þyngd 7 steggja og 7 kollna og skráði. Niðurstöðurnar má sjá hér að neðan (mælt í grömmum).

Kollur	Steggir
999.70	990.12
981.38	989.23
1012.47	987.56
976.15	976.46
968.19	1029.37
974.81	948.75
1023.01	975.55

Meðlimir fuglavinafélagsins reiknuðu út að staðalfrávik þyngdar kollnanna sem mælar voru er 21.04 g og steggjanna 24.14 g. Kannið hvort munur sé á dreifni þyngdar á kollum og steggjum. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.5
Ferðamálafræðingur nokkur framkvæmdi tilraun til að meta hitastig í náttúrulegri laug nálægt Hveragerði. Hann mældi hitastigið 40 sinnum og var hitastigið að meðaltali 38.8 gráður og var staðalfrávikið 4.3 gráður. Finnið 90% öryggisbil fyrir meðalhitastigið í lauginni.

Dæmi 8.6
Ferðamálafræðingarnir Siggi og Sigga ákváðu að kanna meðalfjölda hvala sem sjást þegar farið er í hvalaskoðun á Húsavík í maí. Þau völdu af handahófi 8 ferðir og skráðu fjölda hvala sem sáust. Að meðaltali sáust 12.3 hvalir í ferðunum og staðalfrávikið í þessum 8 ferðum var 4.3. Gera má ráð fyrir að fjöldi hvala sem sjást í hvalaskoðunarferð fylgi normaldreifingu.

a) Finnið 95% öryggisbil fyrir meðalfjölda hvala sem sjást þegar farið er í hvalaskoðun á Húsavík í maí.
b) Kannið hvort meðalfjöldi hvala sem sjást þegar farið er í hvalaskoðun á Húsvík í maí sé frábrugðið 10 hvölum. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.7
Lífefnafræðingur nokkur er að kanna ákveðið efnahvarf. Þetta efnahvarf hefur verið rannsakað mikið og gera má ráð fyrir tíminn sem það tekur fyrir efnahvarfið að ljúka fylgi normaldreifingu með þekkta dreifni sem er 1.2 mínútur. Lífefnafræðingurinn hefur bætt við hvata í efnahvarfið og vill hann sýna fram á að með þessum hvata sé efnahvarfið að meðaltali hraðara en 7.9 mínútur. Gera má ráð fyrir að dreifnin sé þekkt og sé sú sama og án hvatans. Lífefnafræðingurinn tekur tímann sem það tekur efnahvarfið með hvatanum að ljúka 12 sinnum og var meðaltíminn 7.2 mínútur. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort efnahvarfið sé að meðaltali hraðara en 7.9 mínútur. Hér skal nota tvíhliða próf því efnahvarfið gæti í raun verið hægara en 7.9 mínútur. Notið $\alpha = 5\%$.

Dæmi 8.8
Borgaryfirvöld voru að velta fyrir sér meðalfjölda íbúa á heimili í hverfi einu. Könnuð voru 24 heimili og kom í ljós að meðalfjöldi íbúa á hvert heimili var 2.7 og staðalfrávikið var 2.6. Finnið 90% öryggisbil fyrir meðalfjölda íbúa á heimili. Gerið ráð fyrir að fjöldi íbúa fylgi normaldreifingu.

Dæmi 8.9
Siggi sæti hefur áhuga á þyngd snickersstykkja. Hann fer útí búð og kaupir 100 stykki sem hann svo vigtar og skráir samviskusamlega hjá sér hvað hvert stykki er þungt. Á umbúðunum stendur að stykkið sé 42 grömm en Sigga grunar að á meðaltali séu stykkin léttari en það sem gefið er upp á pakkanum. Meðaltal stykkjanna sem Siggi sæti keypti var 40.5 grömm og var staðalfrávikið 0.9 grömm. Kannið hvort snickersstykki séu að meðaltali léttari en það sem gefið er upp á pakkanum, notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.10
Rafhlöðuframleiðandi nokkur fullyrðir að meðallíftími rafhlaðna sem fyrirtækið framleiðir sé 240 klukkustundir. Uppi er sú kenning hjá gæðadeild fyrirtækisins að líftíminn sé frábrugðinn 240 klukkustundum. Gæðadeildin ákvað því að framkvæma tilraun til að kanna þessa kenningu sína. Tekið var slembiúrtak af stærð 18 og líftíminn kannaður. Meðallíftími rafhlaðanna sem kannaðar voru var 237.056 klukkustundir og staðalfrávik 11.280. Gera má ráð fyrir að líftími rafhlaðanna fylgi normaldreifingu.

a) Finnið 95 % öryggisbil fyrir meðallíftíma rafhlaðna.
b) Kannið hvort meðallíftími rafhlaðna sé frábrugðin 240 klukkustundum. Setjið fram tilgáturnar, kannið tilgátuna með viðeigandi prófstærð og lýsið niðurstöðum ykkar stuttlega í orðum. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.11
Lyfjafræðingar sem hafa mikinn áhuga á kólestrólmagni í blóði íslenskra karlmanna völdu af handahófi 20 karlmenn og mældu svo kólesterólið hjá þeim. Meðaltal mælinganna var 205.2 og staðalfrávikið 6.4. Finnið 99% öryggisbil fyrir meðalkólestrólmagn í blóði íslenskra karlmanna. Gera má ráð fyrir að kólesteról í blóði karlmanna á Íslandi fylgir normaldreifingu.

Dæmi 8.12
Margrét matvælafræðingur var að kanna gæði appelsínusafa sem hún er að þróa og fékk 40 manns til að bragða á safanum og gefa honum einkunn frá 0 til 10. Appelsínuvinafélagið flokkar safa sem skora að meðaltali hærra en 7 á sambærilegu prófi sem eðalappelsínusafa. Að tilrauninni lokinni reiknaði Margrét út meðaleinkunn og staðalfrávik og fann hún að meðaleinkunnin var 7.8 og staðalfrávikið 1.8. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort Margrét geti kallað safann sinn eðalappelsínusafa samkvæmt skilgreiningu appelsínuvinafélagsins. Sýnið öll skrefin sex. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.13
Palli jarðfræðingur hefur áhuga á að bera saman skjálftavirkni á suðurlandi og norðurlandi. Hann valdi 40 vikur af handahófi og taldi fjölda skjálfta á hvorum staðnum fyrir sig. Á suðurlandi urðu að meðaltali 23.3 skjálftar á viku og á norðurlandi 31.3 skjálftar. Staðalfrávikið þessar 40 vikur á suðurlandi var 7.7 skjálftar og á norðurlandi 9.1 skjálftar.

a) Finnið 95% öryggisbil fyrir mun á meðalfjölda skjálfta á norðurlandi og suðurlandi.
b) Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á skjálftavirkni á suðurlandi og norðurlandi. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.14

Gulla lyfjafræðingur ætlar að kanna virkni hjartalyfs og ætlar hún að framkvæma tilraunirnar á músum. Áður en hún framkvæmir tilraunina vill hún kanna hvort munur sé á hjartslætti karlkyns og kvenkyns músa. Gera má ráð fyrir að hjartsláttur kvenkyns og karlkyns músa fylgi normaldreifingu. Gulla velur af handahófi 10 kvenkyns og 10 karlkyns mýs og mældi hjartslátt þeirra. Hjartsláttur kvenkyns músanna var að meðaltali 582.7 slög á mínútu og karlkyns músanna var hann 531.7 slög á mínútu. Staðalfrávikið í kvenkyns hópnum voru 34.2 slög og 45.7 í karla hópnum. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á meðalhjartslætti karkyns og kvenkyns músa. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 8.15

Eftirfarandi tölur sýna landaðan afla (í tonnum) á tveimur togurum mánuð einn. Kannið hort munur sé á meðalafla togaranna með viðeigandi tilgátuprófi. Gera ráð fyrir að þyngd aflans fylgi normaldreifingu. Notið $\alpha = 0.05$.

	Togari 1	Togari 2
	109	56
	62	75
	69	89
	85	69
	32	36
	115	162
meðaltal	78.67	81.17
staðalfrávik	31.08	43.46

Dæmi 8.16

Til að kanna hvort nagladekk minnki að meðaltali hemlunarvegalengd miðað við venjuleg dekk var eftirfarandi tilraun framkvæmd. Sex bílar voru notaðir og hemlunarvegalengd mæld með venjulegum dekkjum og nagladekkjum. Aðrar breytur svo sem hraði, ástand vegar osfrv. var sá sami í öllum tilraununum. Gögnin má sjá hér að neðan.

Bíll númer	Venjuleg dekk	Nagladekk
1	73	71
2	79	73
3	64	63
4	55	57
5	72	72
6	70	69

Gera má ráð fyrir að hemlunarvegalengd fylgi normaldreifingu. Rökstyðjið hvaða próf er viðeigandi fyrir þessi gögn til að kanna hvort nagladekk minnki að meðaltali hemlunarvegalengd miðað við venjuleg dekk. Notið tvíhliða próf því nagladekk geta í raun aukið hemlunarvegalengdina. Notið $\alpha = 0.05$. Setjið fram tilgáturnar, kannið tilgátuna með viðeigandi prófstærð og lýsið niðurstöðu ykkar stuttlega í orðum.

Dæmi 8.17
Svokallað PEFR skor (Peak Expiratory Flow Rate) er mælikvarði notaður til að mæla lungnastarfsemi í astmasjúklingum. Því hærra sem gildið er því betur starfa lungun. Sú kenning hefur lengi verið við líði að göngutúrar í köldu veðri hafi jákvæð áhrif á lungnastarfsemina. Til að kanna þessa kenningu ákvað landlæknisembættið að standa fyrir rannsókn þar sem sex astmasjúklingar voru valdir af handahófi og þeir látnir ganga úti í köldu veðri í einn klukkutíma. PEFR skor þeirra var mælt fyrir göngutúrinn og aftur eftir göngutúrinn, einum tíma síðar. Gögnin má sjá hér að neðan.

Astmasjúklingur númer	PEFR skor fyrir	PEFR skor eftir
1	300	312
2	201	242
3	232	340
4	312	388
5	220	296
6	256	254

Gera má ráð fyrir að PEFR skor í astmasjúklingum fylgi normaldreifingu. Rökstyðjið hvaða próf er viðeigandi fyrir þessi gögn til að kanna hvort að ganga í köldu veðri í klukkustund hafi jákvæð áhrif á lungnastarfsemi astmasjúklinga. Notið tvíhliða próf því ganga í köldu veðri getur í raun haft neikvæð áhrif á lungnastarfsemi. Notið $\alpha = 0.05$. Setjið fram tilgáturnar, kannið tilgátuna með viðeigandi prófstærð og lýsið niðurstöðu ykkar stuttlega í orðum.

Dæmi 8.18
Ögmundur er mikill áhugamaður um kvikmyndir og ákvað hann að gera óformlega könnun á lengd spennumynda annars vegar og rómantískra gamanmynda hins vegar. Hann valdi sex spennumyndir og sex rómantískar gamanmyndir af handahófi og skráði hversu langar þær voru. Spennumyndirnar voru að meðaltali 112 mínútur og rómatísku gamanmyndirnar voru að meðaltali 92 mínútur að lengd. Lengd kvikmynda af þessum gerðum hefur verið rannsökuð mikið af kvikmyndavísindamönnum og því má gera ráð fyrir að lengd spennumynda fylgi normaldreifingu með þekkt staðalfrávik 22 mínútur og lengd rómantískra gamanmynda fylgi normaldreifingu með þekkt staðalfrávik 8 mínútur.

a) Hvert er neðra öryggismark 95 % öryggisbils fyrir mismun á meðaltölum spennumynda og gamanmynda?
b) Með rannsókninni vildi Ögmundur sýna að meðallengd rómantískra gamanmynda sé frábrugðin meðallengdar spennumynda. Hver á gagntilgátan að vera?

Dæmi 8.19
Bjórvinafélag Íslands ákvað að framkvæma litla tilraun þar sem gæði tveggja bjórtegunda var borin saman. 10 manns tóku þátt í rannsókninni og var þeim skipt tilviljunarkennt í tvo hópa. Annar hópurinn fékk bjór x og hinn bjór y. Þátttakendurnir gáfu svo bjórnum einkunn frá 0 til 10. Gera má ráð fyrir að einkunnirnar fylgi normaldreifingu. Niðurstöðurnar má sjá hér að neðan:

Bjór x	Bjór y
8.6	6.2
9.2	7.2
7.8	7.6
7.2	8.2
8.9	6.1

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á meðalgæðum bjóranna. Notið $\alpha = 0.01$.

Dæmi 8.20
Hjartsláttur 5 kvenna var mældur fyrir og eftir að þær voru látnar hlaupa upp 100 tröppur. Mælingarnar sjást í töflunni.

Kona	Hjartsláttur fyrir	Hjartsláttur eftir
1	60	70
2	55	61
3	62	88
4	63	72
5	59	80

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort hjartsláttur aukist að meðaltali við að hlaupa upp 100 tröppur. Gera má ráð fyrir að hjartsláttur fylgi normaldreifingu. Notið $\alpha = 0.05$.

9. kafli

Fervikagreining

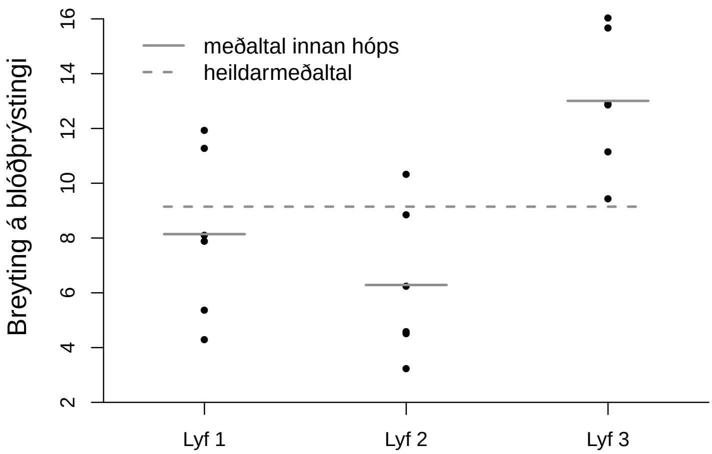
Þið hafið séð ýmsar leiðir til að framkvæma tilgátupróf um meðaltöl þýða. Í kafla 8 voru skoðaðar ályktanir um meðaltal eins þýðis sem og hvernig bera má saman meðaltöl tveggja þýða. Við skulum aðeins rifja upp tvíhliða tilgátuprófin í seinna tilvikinu. Þá prófuðum við núlltilgátuna hvort meðaltal hópanna tveggja sé ólíkt. Eðlileg útvíkkun á þeirri athugun væri að spyrja sig: Hvað ef hóparnir væru fleiri? Í þeim tilvikum getum við ekki notað t-próf heldur styðjumst við við aðferð sem kallast *fervikagreining* (analysis of variance eða ANOVA).

Fervikagreining er ein af mest notuðu aðferðunum innan tölfræðinnar og til eru mörg tilbrigði hennar sem má laga að gífurlega mörgum ólíkum tilfellum. Í þessari bók munum við einungis skoða eitt tilbrigði hennar sem kallast *einhliða fervikagreining* (one-sided ANOVA). Henni beitum við á gögn sem eru úrtök úr tveimur eða fleiri þýðum og er algengt að nota orðið hópar þegar talað er um úrtökin. Aðferðin gengur út á að bera saman breytileika á gildum mælinga milli hópa annars vegar og innan hópa hins vegar. Út frá því er ályktað hvort meðaltölin séu ólík eða ekki. Fervikagreining gerir ráð fyrir að úrtökin séu slembiúrtök, að þau séu valin úr þýðum sem fylgja normaldreifingu og að dreifnin sé sú sama í öllum þýðum.

9.1. Einþátta fervikagreining

Við skulum byrja á því að skoða lítið dæmi þar sem fervikagreining er framkvæmd til að draga ályktanir um blóðþrýstingslyf.

Lyfjafyrirtæki nokkurt er að þróa ný blóðþrýstingslyf og í því samhengi var lítil tilraun framkvæmd. Átján einstaklingar tóku þátt í tilrauninni og var þeim skipt tilviljunakennt upp í þrjá hópa. Hópur eitt fékk lyf 1, hópur tvö lyf 2 og hópur þrjú fékk lyf 3. Blóðþrýstingur fólksins var mældur fyrir inntöku lyfsins og aftur eftir inntöku. Breytan sem við höfum áhuga á er breyting á blóðþrýstingi fyrir og eftir inntöku lyfsins. Meðalbreyting á blóðþrýstingi í hópunum þremur var reiknaður. Í öllum hópunum hafði blóðþrýstingurinn lækkað að meðaltali.



Mynd 9.1: Gögn fyrir fervikagreiningu

Meðalbreyting hópur 1: $\bar{x}_1 = 8.14$
Meðalbreyting hópur 2: $\bar{x}_2 = 6.28$
Meðalbreyting hópur 3: $\bar{x}_3 = 13.01$

Spurningin er nú hvort munur sé á lyfjunum. Það er hvort blóðþrýstingurinn lækki mismikið milli hópa. Við sjáum auðveldlega að meðaltölin hér að ofan eru ólík en eru þau nógu ólík til að við getum fullyrt að lyfin valdi mismikilli lækkun?

Byrjum á að skoða mælingarnar okkar myndrænt, sjá mynd 9.1. Á þeirri mynd má, auk mælinganna, sjá meðaltal hvers hóps (heilar línur) og sameiginlegt meðaltal allra mælinganna (brotalínur). Það er mikilvægt að dreifni hvers hóps fyrir sig sé ekki mjög ólík þar sem aðferðin gerir ráð fyrir að hún sé sú sama. Í þessu tilviki virðist dreifnin vera svipuð og því er viðeigandi að nota einhliða fervikagreiningu.

Fervikagreining gengur út á að skipta heildarbreytileika á gildum mælinganna upp í breytileika milli hópanna annars vegar og breytileika innan hópanna hins vegar. Til þess reiknum við út svokallaðar *fervikasummur*.

9.1.1. Fervikasummur

Áður en við skoðum fervikasummurnar þurfum við að kynna nýjan ritháatt til sögunnar sem algengt er að nota þegar unnið er með fervikagreiningu.

9.1. Ritháttur notaður í fervikagreiningu
Eftirfarandi ritháttur er algengur í kennslubókum og ritum sem fjalla um fervikagreiningu.

y_{ij} : Við notum vísinn i til að tákna númer hóps og vísinn j til að tákna númer mælingu innan hóps. y_{ij} er því mæling númer j úr hópi i.

a : Við notum a til að tákna fjölda hópa.

n_i : Við notum n_i til að tákna fjölda mælinga í hópi i.

N : Við notum N til að tákna heildarfjölda mælinga

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_a. \tag{9.1}$$

$\bar{y}_{i.}$: Við notum $\bar{y}_{i.}$ til að tákna meðaltal fyrir hóp i

$$\bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}. \tag{9.2}$$

$\bar{y}_{..}$: Við notum $\bar{y}_{..}$ til að tákna meðaltal allra mælinga (úr öllum hópum)

$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{N}. \tag{9.3}$$

Við þurfum að reikna þrjár fervikasummur og eru þær táknaðar með SS_T, SS_{Tr} og SS_E. SS_T er heildarfervikasumman og er hún mælikvarði á heildarbreytileika gagnanna (total variation). SS_{Tr} er mælikvarði á breytileika milli hópanna (between treatments) þ.e. hversu breytileg eru meðaltöl hópanna. SS_E er mælikvarði á breytileika innan hópanna (within treatments eða error) það er að segja hversu mikið víkja mælingar innan hvers hóps frá meðaltali hópsins.

9.2. Fervikasummur í einhliða fervikagreiningu (Sums of squares in one-sided ANOVA)

Fervikasummurnar eru reiknaðar með

$$SS_T = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 \tag{9.4}$$

$$SS_{Tr} = \sum_{i=1}^{a} n_i (\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2 \tag{9.5}$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \tag{9.6}$$

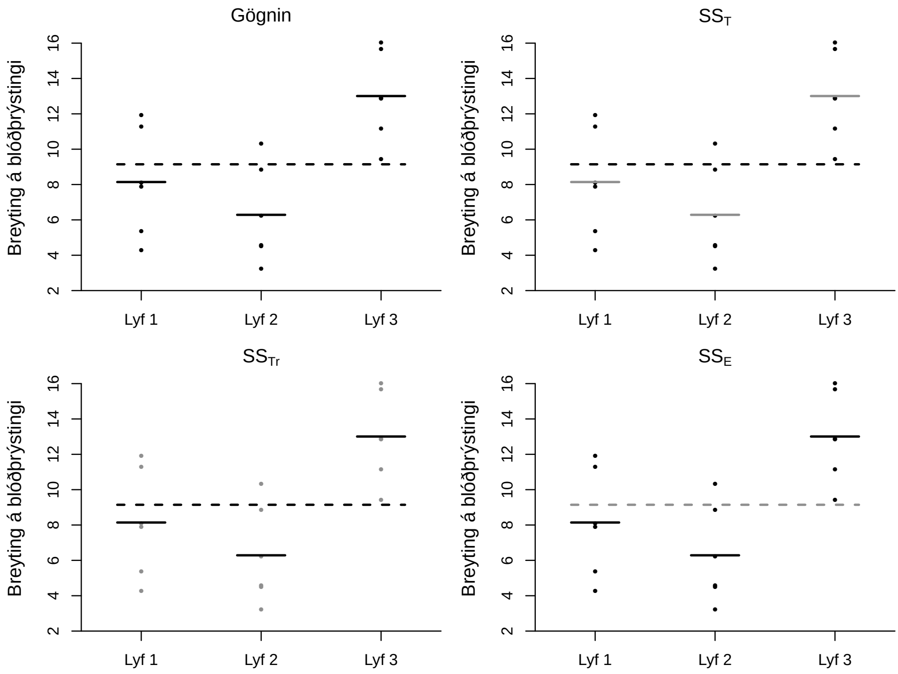
Heildarbreytileikanum má skipta upp í breytileika milli hópanna annars vegar og breytileika innan hópanna hins vegar eða

$$SS_T = SS_{Tr} + SS_E. \tag{9.7}$$

Til að skilja jöfnur (9.4) - (9.6) betur skulum við skoða mynd 9.2. Á grafinu efst í vinstra horninu má sjá mælingarnar, y_{ij}, meðaltöl innan hópanna, $\bar{y}_{i.}$, (heilar línur) og heildarmeðaltalið, $\bar{y}_{..}$, (brotalína). Hinar myndirnar þrjár lýsa myndrænt hvernig reikna á SS_T, SS_{Tr} og SS_E. Þeir liðir sem jöfnurnar innihalda eru teiknaðir svartir en hinir liðirnir, sem jöfnurnar innihalda ekki, eru gráir.

Sé jafna (9.4) og myndin efst í hægra horninu skoðuð má sjá að SS_T inniheldur fjarlægðir mælinganna okkar frá heildarmeðaltalinu og er því mælikvarði á heildarbreytileika mælinganna. Sé jafna (9.5) og myndin neðst í vinstra horninu skoðuð má sjá að SS_{Tr} inniheldur fjarlægðir meðaltala hópanna frá heildarmeðaltalinu og er því mælikvarði á breytileika meðaltalanna milli hópanna. Sé að lokum jafna (9.6) skoðuð og myndin neðst í hægra horninu má sjá að SS_E inniheldur fjarlægðir mælinganna frá meðaltali þess hóps sem þær tilheyra og er því mælikvarði á breytileika mælinganna innan hvers hóps.

Algengt er að setja kvaðratsummurnar upp í svokallaða *fervikagreiningartöflu* (ANOVA table). Sú tafla samanstendur af þremur dálkum og þremur línum. Fyrsti dálkurinn inniheldur fervikasummurnar (reiknaðar með jöfnum (9.4) - (9.6)). Annar dálkurinn inniheldur fjölda *frígráða* fyrir hverja fervikasummu fyrir sig en það heiti bera stærðirnar $a-1$, $N-a$ og $N-1$. Þriðji dálkurinn inniheldur svokallaðar meðalfervikasummur. Þær reiknum við með því að deila viðkomandi fervikasummu með fjölda frígráða sem henni tilheyra (í sömu línu). Dæmigerða fervikasummutöflu má sjá hér að neðan.



Mynd 9.2: Fervikasummur

Fervikasummur	Frígráður	Meðalfervikasummur
SS_{Tr}	$a-1$	$MS_{Tr}=\frac{SS_{Tr}}{a-1}$
SS_E	$N-a$	$MS_E=\frac{SS_E}{N-a}$
SS_T	$N-1$	

9.1.2. Tilgátupróf í fervikagreiningu

Tilgátuprófið sem við notum í fervikagreiningu gerir ráð fyrir að dreifnin í hópunum sé sú sama. Áður en við framkvæmum prófið þurfum við því að kanna hvort gögnin okkar uppfylli það skilyrði. Það eru til próf sem kanna þetta formlega, svo sem Levene próf en hér munum við láta okkur nægja að skoða gögnin myndrænt og út frá því álykta hvort gera megi ráð fyrir að dreifni hópanna sé sú sama.

9.3. Tilgátupróf fyrir einhliða fervikagreiningu

Tilgátan sem við viljum kanna er almennt

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_a$$

á móti gagntilgátunni

$$H_1 : \text{Að minnsta kosti eitt meðaltal er frábrugðið hinum}$$

Prófstærðin er

$$F = \frac{SS_{Tr}/(a-1)}{SS_E/(N-a)} = \frac{MS_{Tr}}{MS_E}. \tag{9.8}$$

þar sem SS_{Tr} og SS_E má reikna með jöfnum 9.5 og 9.6. Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin F-dreifingu með $a-1$ og $N-a$ fjölda fríráða, eða $F \sim F_{(a-1,N-a)}$, þar sem a er fjöldi hópa og N er heildarfjöldi mælinga.

Hafna skal H_0 ef $F > F_{1-\alpha,(a-1,N-a)}$.

Sé núlltilgátunni hafnað er a.m.k eitt meðaltalanna frábrugðið hinum.

Eins og sjá má hér að ofan er gagntilgátan sú að að minnsta kosti eitt meðaltal sé frábrugðið hinum. Það eru því einu upplýsingarnar sem við fáum þegar núlltilgátunni er hafnað. Við vitum ekki hvert meðaltalanna er frábrugðið hinum eða hvort þau séu mögulega öll frábrugðin hvort öðru. Það þarf að framkvæma frekari greiningu til að komast að því. Algeng próf eru Tukey's próf og Duncan's próf en ekki verður fjallað um þau hér.

Í upphafi kaflans sögðum við að fervikagreining gengi út á að bera saman breytileika milli hópa og breytileika innan hópa. Sé jafna (10.19) skoðuð má sjá að teljari prófstærðarinnar (fyrir ofan strik) er mælikvarði á breytileika milli hópanna og nefnarinn (fyrir neðan strik) er mælikvarði á breytileika innan hópanna. Sé þetta hlutfall nægilega hátt, fellur það á höfnunarsvæðið og við ályktum að meðaltölin séu ólík.

Sýnidæmi 9.1: Fervikagreining

Skoðum dæmið um blóðþrýstingslyfin. Gögnin má sjá hér að neðan.

Lyf 1	Lyf 2	Lyf 3
4.29	10.32	12.89
11.28	3.23	15.68
5.37	4.51	16.03
7.89	4.57	9.43
8.10	8.85	12.86
11.93	6.23	11.15

Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á meðalblóðþrýstingi eftir lyfjum.

Förum nú eftir samantektinni um framkvæmd tilgátuprófa.

1. Við ætlum að álykta um mun á meðaltölum þriggja þýða. Úrtökin eru **óháð**. Sé mynd 9.1 skoðuð má sjá að dreifni hópanna er svipuð og því óhætt að nota fervikagreiningu.

2. Við notum $\alpha = 0.05$ að venju.

3. Tilgáturnar eru
$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$
og
$$H_1 : \text{a.m.k eitt meðaltal er frábrugðið hinum.}$$

4. Áður en við reiknum prófstærðina þurfum við að reikna fervikasummurnar.

   Þar sem hóparnir eru 3 er $a = 3$. Það eru sex mælingar í hverjum hóp og því er $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ og því er $N = 6+6+6 = 18$. Reiknum nú heildarmeðaltalið með jöfnu (9.3)
$$\bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{N} = \frac{4.29+10.32+12.89+11.28+...+11.15}{18} = 9.15$$
   og meðaltöl innan hópanna með jöfnu (9.2)
$$\bar{y}_{1.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}}{n_1} = \frac{4.29+11.28+...+11.93}{6} = 8.14,$$
$$\bar{y}_{2.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}}{n_2} = \frac{10.32+3.23+...+6.23}{6} = 6.29,$$
$$\bar{y}_{3.} = \frac{\sum_{j=1}^{n_3} y_{3j}}{n_3} = \frac{12.89+15.68+...+11.15}{6} = 13.01.$$
   Þá erum við tilbúin til að reikna fervikasummurnar. Við byrjum á að reikna SS_T með jöfnu (9.4)
$$\begin{aligned}SS_T =& \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{n_i}(y_{ij}-\bar{y}_{..})^2\\ =&(4.29-9.15)^2+(11.28-9.15)^2+...+(11.15-9.15)^2 = 262.16.\end{aligned}$$

Reiknum svo SS_{Tr} með jöfnu (9.5)

$$SS_{Tr} = \sum_{i=1}^{a} n_i(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..})^2$$
$$= 6 \cdot (8.14 - 9.15)^2 + 6 \cdot (6.29 - 9.15)^2 + 6 \cdot (13.01 - 9.15)^2 = 144.53.$$

Að lokum getum við reiknað SS_E með hjálp jöfnu (10.18)

$$SS_E = SS_T - SS_{Tr} = 117.63.$$

Setjum nú fervikasummurnar í fervikagreiningartöflu:

Fervikasummur	Frígráður	Meðalfervikasummur
$SS_{Tr} = 144.53$	$a - 1 = 2$	$MS_{Tr} = 72.27$
$SS_E = 117.63$	$N - a = 15$	$MS_E = 7.84$
$SS_T = 262.16$	$N - 1 = 17$	

Til að kanna tilgátuna setjum við inn í prófstærðina í jöfnu (10.19)

$$f = \frac{72.27}{7.84} = 9.21.$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum við til þess F-töflu. Við flettum upp eftir $a - 1 = 2$ og $N - a = 15$ frígráðum. $F_{1-\alpha,((a-1),(N-a))} = F_{0.95,(2,15)} = 3.68$. Við sjáum að $f > 3.68$ og því lendir prófstærðin á höfnunarsvæði.

6. Við höfnum núlltilgátunni og ályktum að a.m.k eitt lyfjanna sé frábrugðið hinum.

Dæmi

Dæmi 9.1

Tóti tölfræðingur ætlar að bera saman meðaltöl fjögurra hópa með því að nota fervikagreiningu. Hann hefur 8 mælingar í hverjum hópi. Hann ætlar að nota $\alpha = 0.05$. Hvert er höfnunarsvæðið?

Dæmi 9.2

Neytendasamtökin ákváðu að standa fyrir rannsókn þar sem þrjár mismunandi tegundir af lyftidufti voru bornar saman í þeim tilgangi að athuga hvort munur væri á lyftiduftunum. Rannsóknin fór þannig fram að fimm mismunandi uppskriftir voru notaðar sem allar innihéldu lyftiduft og voru þær allar bakaðar með mismunandi lyftiduftstegundum. Rúmmál kakanna var í lokinn mælt og skráð í töflu. Niðurstöðurnar voru eftirfarandi:

Lyftiduft 1	Lyftiduft 2	Lyftiduft 3
83	65	92
90	82	102
96	90	106
83	65	82
77	72	97

Eftirfarandi stærðir voru einnig reiknaðar: $SS_T = 2149.73$ og $SS_{Tr} = 1103.33$. Kannið með viðeigandi tilgátuprófi hvort munur sé á lyftiduftunum. Notið $\alpha = 0.05$.

Dæmi 9.3

Kennslufræðingur nokkur ákvað að gera könnun á hvort munur sé á lærdómi eftir bakgrunnshljóðum. Hún skipti 24 nemendum tilviljunarkennt upp í þrjá hópa og fengu þeir allir texta til að lesa í 30 mínútur. Fyrsti hópurinn las textann á meðan spilaður var tónn við sama styrk í þessar 30 mínútur. Hópur númer tvö las textann á meðan hljóð við misjafnan styrk var spilað. Þegar þriðji hópurinn las textann var ekkert bakgrunnshljóð. Að loknum þessum 30 mínútum var lagt próf fyrir nemendurna og niðurstöðurnar skráðar. Að þessu loknu reiknaði kennslufræðingurinn fervikasummurnar út en náði ekki að klára að fylla út fervikasummutöfluna. Kannið hvort munur sá á lærdómi eftir bakgrunnshljóðum. Notið $\alpha = 0.05$.

	Fervikasumma	Frígráður	Meðalfervikasumma
Milli hópa	30.08		
Innan hópa			
Heild	117.96		

Dæmi 9.4

Linda lífefnafræðingur ætlar að bera saman meðaltöl 3 hópa og ákvað því að framkvæma fervikagreiningu. Linda byrjaði á að fylla út fervikasummutöflu en náði ekki að klára hana. Töfluna má sjá hér að neðan.

	Fervikasumma	Frígráður	Meðalfervikasumma
Milli hópa	112.17		
Innan hópa			xxx
Heild	223.91	23	

a) Hvaða gildi á að standa þar sem stendur xxx í töflunni?

b) Hvert er gildið á prófstærð Lindu lífefnafræðings?

10. kafli

Aðhvarfsgreining

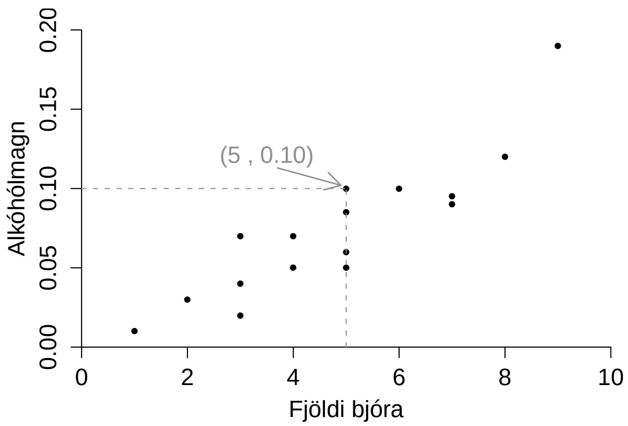
Umfjöllunarefni þessa kafla er *aðhvarfsgreining* (regression). Aðhvarfsgreining er gífurlega almenn aðferð sem er notuð til að kanna samband *háðrar breytu* (dependent variable) og einnar eða fleiri *óháðra breyta* (independent variables). Sé óháða breytan aðeins ein er talað um *einfalt línulegt aðhvarf* (simple linear regression) en séu þær fleiri er talað um *fjölþætt línulegt aðhvarf* (multiple linear regression). Við munum einungis fjalla um einfalt línulegt aðhvarf í þessari bók.

Með einföldu línulegu aðhvarfi viljum við finna jöfnu þeirra línu (sjá kassa 7 í kafla 4) sem lýsir best sambandi tveggja breyta og metur hversu gott það mat er. Stundum má áætla að orsakasamband sé á milli breytanna tveggja og þá er svarbreytan alltaf háða breytan en skýribreytan sú óháða (sjá kassa 2.10 í kafla 2.2). Það er umdeilt að nota línulega aðhvarfsgreiningu þegar ekki er orsakasamband milli breytanna og munum við því ekki taka dæmi um slíkt. Við munum gera ráð fyrir að það sé orsakasamband á milli breytanna og því getum við talað um háðu breytuna sem svarbreytu og þá óháðu sem skýribreytu.

Það gefur að skilja að það er lítið vit í að framkvæma línulegt aðhvarf nema sambandi breytanna sé yfir höfuð hægt að lýsa með beinni línu. Fyrsta skrefið í allri aðhvarfsgreiningu ætti því ætíð að vera að skoða *punktarit* af breytunum (kafli 3.4) til að kanna hvort svo sé. Ef okkur sýnast punktarnir þyrpast í kringum einhverja beina línu er sambandið línulegt. Ef við sjáum skýr merki um sveigjur í punktaritinu getur sambandið ekki verið línulegt.

10.1. Einfalt línulegt aðhvarf

Byrjum á því að rifja aftur upp dæmi 3.5 þar sem Þorgerður og Birna könnuðu samband bjórdrykku og áfengismagns í blóði. Markmið línulegrar aðhvarfsgreiningar væri að meta jöfnu línu sem lýsir sambandi bjórdrykku og áfengismagnsins í blóðinu sem og að meta hversu áreiðanlegt þetta samband sé.



Í einföldu línulegu aðhvarfi göngum við út frá því að skýribreytan sé *föst* (fixed), það er að segja að skýribreytan sé ekki slembin (random). Við getum líka orðað það sem svo að við trúum því að það sé engin óvissa í mælingum okkar á skýribreytunni. Svarbreytan er hins vegar slembin og dreifing hennar er háð x. Við notum Y til að tákna svarbreytuna og x til að tákna skýribreytuna. Í dæminu um bjórdrykkjuna útleggst það svo að engin óvissa sé fólgin í því hversu marga bjóra hver og einn einstaklingur drakk, en hins vegar geti verið óvissa fólgin í því hversu mikið áfengismagn í blóði mælist í kjölfarið.

Aðhvarfslína (regression line) er bein lína sem lýsir því hvernig svarbreytan Y breytist þegar skýribreytan x breytist. Aðhvarfslínan er oft notuð til að *spá* (predict) fyrir um það hvaða gildi Y mun taka fyrir gefið gildi á x. Þegar við notum aðhvarfslínuna til að spá fyrir um gildi á Y þá táknum við spágildin með $\hat{y}$, lesið y-hattur. Í dæminu okkar spáir aðhvarfslínan fyrir um hve mikið áfengismagn mun mælast í blóði eftir að tiltekinn fjöldi bjóra hefur verið drukkinn.

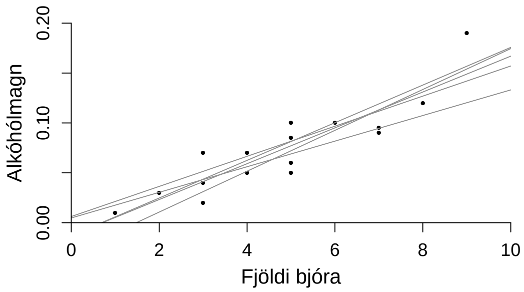
10.1. Aðhvarfsgreiningarlíkanið (simple linear regression model)

Einfalda aðhvarfsgreiningarlíkanið (simple linear regression model) má skrifa sem

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \tag{10.1}$$

þar sem β_0 og β_1 eru óþekktir stikar og ε er normaldreifð slembistærð með meðaltal 0.

Skoðum nú aftur jöfnu (10.1). Við sjáum að β_0 er skurðpunktur línunnar við y-ásinn og β_1 er hallatala línunnar. Þetta eru hin sanna hallatala og skurðpunktur sem við ekki þekkjum og eru stikarnir oft kallaðir þýðishallatala og þýðisskurðpunktur. Við getum aftur á móti tekið úrtak og notað gögnin til að meta þá. Til að meta stikana β_0 og β_1 framkvæmum við því tilraun og söfnum saman gögnum fyrir Y og x og notum þau til að meta stikana.



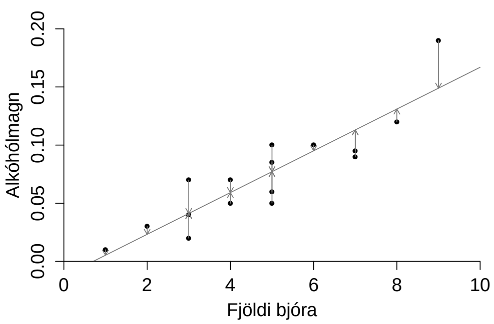
Mynd 10.1: Margar línur en hvaða lína er best?

Skoðum nú aftur bjórdæmið. Þar var safnað saman gögnum um áfengismagn í blóði og fjölda drukkinna bjóra. Út frá þessum gögnum má meta stikana í aðhvarfslíkani sem lýsir sambandi áfengismagns í blóði og fjölda drukkinna bjóra. Á mynd 10.1 má sjá gögnin úr dæminu en á myndina er einnig búið að setja nokkrar línur sem hafa ólíka skurðpunkta og hallatölur.

Með því að skoða myndina er alls ekki augljóst hvaða línu er best að nota til að lýsa sambandi Y og x. Við þurfum því eitthvert viðmið til að ákveða hvaða lína er best. Það viðmið sem við notum er *aðferð minnstu kvaðrata*.

10.1.1. Aðferð minnstu kvaðrata

Aðferð minnstu kvaðrata er algengasta aðferðin til að meta stikana í aðhvarfsgreiningar líkaninu. Aðferðin finnur línunni stað þar sem summa lóðréttar fjarlægðar milli einstakra punkta og línunar í öðru veldi er lágmörkuð. Þessi fjarlægð er kölluð *leifar* (residuals) . Á mynd 10.2 má aftur sjá gögnin frá dæmi 3.5 ásamt línu minnstu kvaðrata og leifunum sem merktar eru inn á myndina með örvum.



Mynd 10.2: Aðferð minnstu kvaðrata

10.2. Jafna aðhvarfslínu minnstu kvaðrata (least squares equation)

Gerum ráð fyrir að við höfum n paraðar mælingar (x_i, y_i) þar sem gera má ráð fyrir að aðhvarf Y á x sé línulegt. Táknum meðaltal og staðalfrávik x breytunnar með $\bar{x}$ og s_x og y breytunnar með $\bar{y}$ og s_y. Fylgnina á milli x og y táknum við með r. Notum b_0 til að tákna mat á β_0 og b_1 til að tákna mat á β_1. Þá reiknum við b_0 og b_1 með

$$b_1 = r\frac{s_y}{s_x} \tag{10.2}$$

og

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x}. \tag{10.3}$$

Við notum stikana b_0 og b_1 til að smíða jöfnuna

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x. \tag{10.4}$$

sem við notum til að *spá* (predict) fyrir um hvert gildið á y verður fyrir þekkt gildi á x.

Sýnidæmi 10.1: Einfalt línulegt aðhvarf

Skoðum aftur gögnin úr dæmi 3.5. Finnið jöfnu aðhvarfslínunnar með því að nota aðferð minnstu kvaðrata.

Út frá gögnunum má reikna:

$$\bar{x} = 4.813, \quad s_x = 2.198, \quad \bar{y} = 0.074, \quad s_y = 0.044, \quad r = 0.894.$$

Þá getum við reiknað

$$b_1 = r\frac{s_y}{s_x} = 0.894 \cdot \frac{0.044}{2.198} = 0.018$$

og

$$b_0 = \bar{y} - \beta_1\bar{x} = 0.074 - (0.018 \cdot 4.813) = -0.013.$$

Jafna minnstu kvaðrata er þá

$$\hat{y} = -0.013 + 0.018x.$$

10.1.2. Leifar

10.3. Leifar (Residuals)

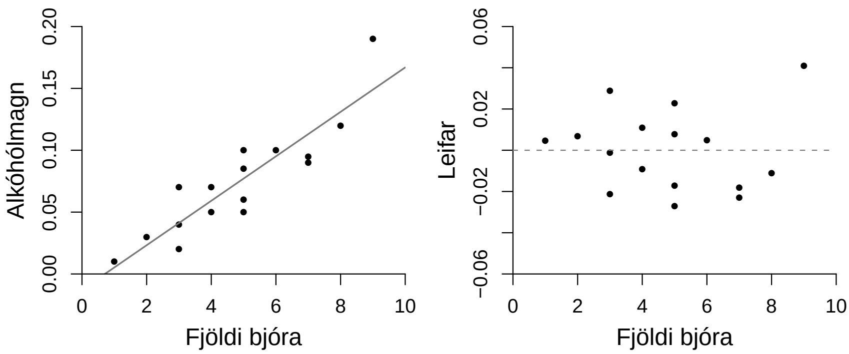
Lóðrétta fjarlægðin frá mælingunum okkar að aðhvarfslínunni köllum við *leifar* og táknum með e. Stærð leifa má reikna með

$$e_i = y_i - \hat{y}_i.$$

Punktar ofan aðhvarfslínunnar hafa jákvæða leif en punktar neðan hennar neikvæða.

Ef punktur lendir ofan við aðhvarfslínuna er y gildið stærra en aðhvarfslínan spáir fyrir um. Þá er leifin jákvæð. Ef punktur lendir neðan við aðhvarfslínuna er y gildið minna en aðhvarfslínan spáir fyrir um. Þá er leifin neikvæð.

Leifar segja okkur hversu vel aðhvarfslínan lýsir gögnunum. Því skal alltaf skoða leifarnar að lokinni aðhvarfsgreiningu en til þess notum við *leifarit* (residual plot). Leifaritið sýnir leifarnar á y-ásnum og skýribreytuna á x-ásnum. Fleiri tegundir leifarita eru til en við látum þetta nægja hér. Vinstra megin á mynd 10.3 má sjá punktarit af gögnunum úr dæmi 3.5 ásamt aðhvarfslínunni. Hægra megin á myndinni má sjá leifarit fyrir sömu gögn. Takið eftir að x-ásinn er því sá sami og er á punktaritinu en y-ásinn ekki.



Mynd 10.3: Punktarit af gögnum og leifarit

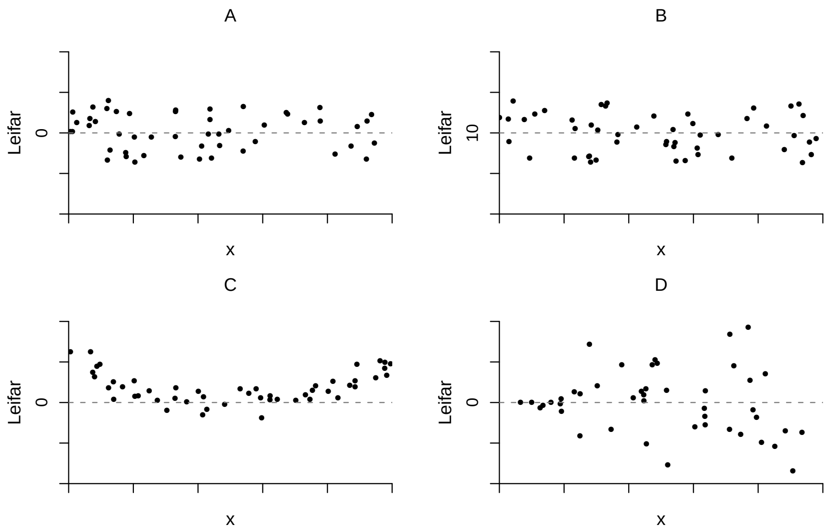
Dreifing leifanna á að vera tilviljunarkennd umhverfis 0. Enga reglu á að sjá í leifunum. Séu þessi skilyrði brotin skal ekki nota aðhvarfslíkanið til að lýsa gögnunum. Skoðum nú mynd 10.4 þar sem sjá má fjögur leifarit.

A Hér eru leifarnar dreifðar tilviljunarkennt kringum núll. Allt er eins og það á að vera.

B Hér eru leifarnar dreifðar tilviljunarkennt en ekki kringum núll. Ekki ásættanlegt.

C Hér fylgja leifarnar bogadregnu mynstri. Það bendir til þess að samband Y og x sé ekki línulegt. Ekki ásættanlegt.

D Leifarnar eru ekki dreifðar tilviljunarkennt. Dreifni leifanna virðist aukast með hærri gildum á x. Ekki ásættanlegt.



Mynd 10.4: Leifarit

10.1.3. Brúun og bryggjun

Við getum notað jöfnu aðhvarfslínunnar, jöfnu (10.4), til að spá fyrir um hvaða gildi Y mun taka fyrir ákveðið gildi á x. Áður en það er gert skal skoða á hvaða bili x-gildin sem við notuðum til að meta líkanið liggja. Það getur nefnilega verið mjög vafasamt að nota jöfnu aðhvarfslínunnar til að spá fyrir um gildi á Y fyrir gildi á x sem eru ekki á sama reki og x-gildin sem notuð voru til að meta stikana í líkaninu.

10.4. Brúun (Interpolation)

Sé aðhvarfslíkan notað til að spá fyrir um gildi á Y fyrir eitthvert gildi á x sem er á sama reki og x-gildin sem notuð voru til að meta stikana í líkaninu er talað um að *brúa*.

Sýnidæmi 10.2: Brúun

Skoðum nú aftur gögnin úr dæmi 3.5. Spáið fyrir um áfengismagn í blóði einstaklings sem drukkið hefur 6.5 bjóra.

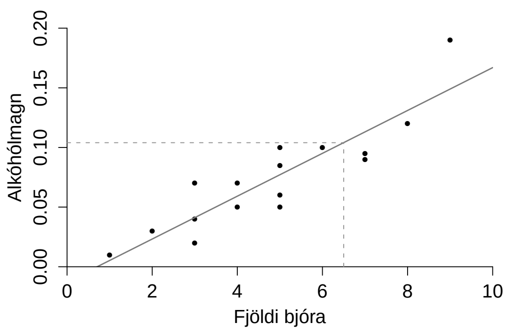
Við sáum í dæmi 10.1 að jafna minnstu kvaðrata er

$$\hat{y} = -0.013 + 0.018x.$$

Enginn í rannsókninni drakk 6.5 bjóra en rannsóknin náði yfir einstaklinga sem drukkið höfðu frá einum og upp í níu bjóra. 6.5 liggur á því bili og því erum við að brúa þegar við notum aðhvarfslínuna til að spá fyrir um áfengismagnið. Við setjum 6.5 inn í stað x í jöfnunni hér að ofan og fáum að

$$\hat{y} = -0.013 + (0.018 \cdot 6.5) = 0.104.$$

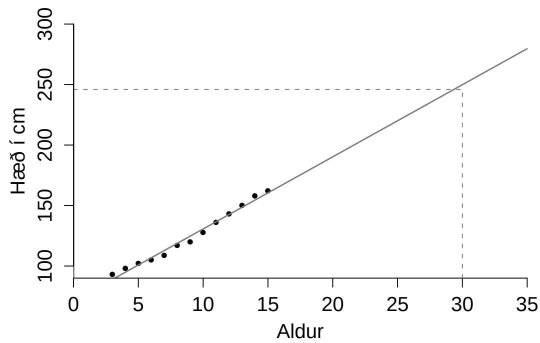
Við spáum því að manneskja sem drekki 6.5 bjóra mælist með alkohólmagn 0.104.



10.5. Bryggjun (extrapolation)

Sé aðhvarfslíkan notað til að spá fyrir um gildi á Y fyrir eitthvert gildi á x sem er **fjarri** þeim x-gildum sem notuð voru til að meta stikana í líkaninu er talað um að *bryggja*. Þetta svarar til að lengja aðhvarfslínuna. Það getur verið mjög vafasamt að bryggja!

Á mynd 10.5 má sjá niðurstöður mælinga á hæð drengja á aldrinum 3-15 ára. Sjá má á myndinni að aðhvarfslínan lýsir vel sambandi hæðar og aldurs drengja á bilinu 3-15 ára og væri því hægt að nota líkanið til að spá fyrir um hæð drengja á þeim aldri. Hins vegar væri rangt að nota líkanið til að spá fyrir um hæð drengja á aldri sem ekki liggur



Mynd 10.5: Bryggjun

á bilinu 3-15 ára. Sé myndin skoðuð má til dæmis sjá að líkanið okkar spáir því að 30 ára gamall maður sé tæplega 250 cm á hæð! Hér erum við að nota líkanið til að spá fyrir um Y-gildi fyrir x-gildi sem liggur fjarri upphaflegu x gildanna. Því erum við að bryggja og það ber ávallt að varast!

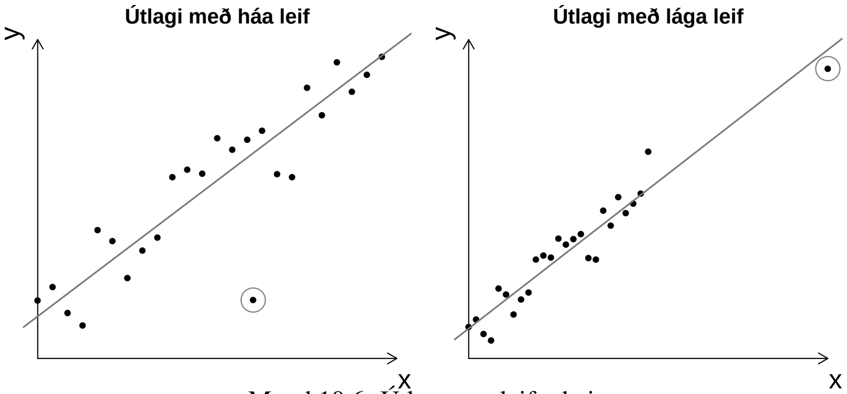
10.1.4. Skýringarhlutfall

Munið að fylgni segir okkur til um stefnu og styrkleika línulegs sambands tveggja breyta en ekki hvert sambandið milli breytanna er. Fylgnistuðull hefur hins vegar beina tengingu inn í línulega aðhvarfsgreiningu, því með honum má reikna *skýringarhlutfall* (e. R squared).

10.6. r^2 í aðhvarfsgreiningu
Sé fylgnistuðullinn settur í annað veldi, r^2, er talað um skýringarhlutfall. r^2 stendur fyrir hlutfallslegan breytileika í Y sem er hægt að skýra út með breytingum á x.

Sýnidæmi 10.3: Skýringarhlutfall
Skoðum aftur dæmi 10.1. Hversu mikið af breytileika í áfengismagni má skýra út með fjölda drukkinna bjóra?

Við sáum áður að í tilrauninni var fylgnistuðullinn $r = 0.894$. Því fáum við að $r^2 = 0.894^2 = 0.799$. Því má segja að um 80 % af breytileika í alkóhólmagni megi skýra með fjölda drukkinna bjóra.



Mynd 10.6: Útlagar og leifar þeirra

10.1.5. Útlagar og áhrifamikil mæligildi

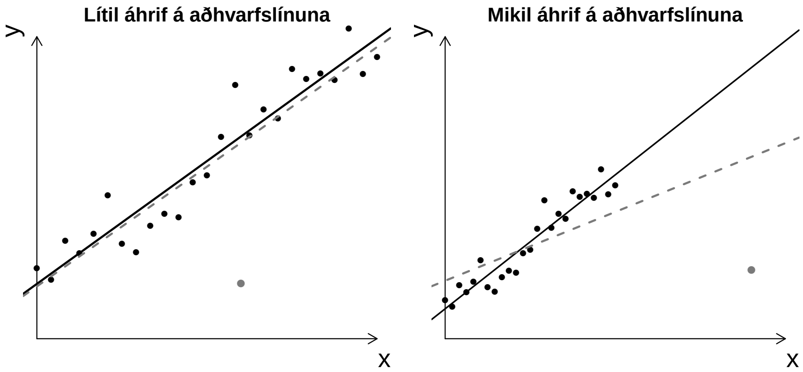
Útlagi (kassi 3.5) er mæligildi sem er ólíkt öðrum mæligildum í safninu. Mæligildi þar sem y gildið er frábrugðið hinum y gildunum hefur háa leif. Aðrir útlagar eru ekki endilega með háa leif . Á mynd 10.6 má sjá tvo útlaga. Útlaginn á myndinni til vinstri er með háa leif en útlaginn hægra megin ekki.

Mæligildi er sagt *áhrifaríkt* (influential) ef útkoma útreikninga breytist mikið við það að fjarlægja það úr gagnasafninu. Mæligildi þar sem x gildið er frábrugðið hinum x gildunum (og er þar af leiðandi útlagi) er oft áhrifaríkt.

Skoðum nú mynd 10.7. Á myndinni vinstra megin má sjá útlaga. Gráa brotalínan er aðhvarfslínan sem fæst þegar allar mælingarnar eru notaðar til að meta hana en svarta heila línan fæst ef útlaganum er sleppt. Það sést að ekki er mikill munur á línunum og því er útlaginn ekki áhrifamikill. Skoðum við aftur á móti myndina hægra megin sést að mikill munur er á línunum og því er útlaginn þeim megin áhrifamikill.

Það er ekki alltaf augljóst hvað gera á við útlaga og áhrifamikil mæligildi. Ágætt er að hafa eftirfarandi í huga þegar áhrifamikil mæligildi og/eða útlagar leynast í gagnasafni:

1. Það á alltaf að skoða útlaga og áhrifamikil mæligildi sérstaklega.
2. Ef mistök hafa átt sér stað skal fjarlæga mæligildið úr safninu.
3. Ef ekki er hægt að sýna fram á að um mistök hafi verið að ræða er oft gott að sýna útreikninga með og án þessara gilda.
4. Í sumum tilfellum er eðlilegast að byggja útreikninga á mælisafninu án útlaga/-áhrifamikilla mæligilda en í þeim tilfellum verður að taka fram að líkanið gildi ekki fyrir mæligildi utan þess ramma mæligilda sem notuð voru við gerð líkansins.



Mynd 10.7: Áhrifamikil mæligildi

10.2. Ályktanir í aðhvarfsgreiningu

Nú er kominn tími til að setja aðhvarfsgreiningu í samhengi við það sem við höfum áður lært um ályktunartölfræði. Mælingarnar okkar eru einhverri slembni háðar og því getum við fengið aðrar niðurstöður ef við endurtökum tilraunina og þar af leiðandi annað mat á aðhvarfslínunni okkar. Því er eðlilegt að reikna öryggisbil og tilgátupróf í einföldu línulegu aðhvarfi líkt og þið hafið séð svo mörg dæmi um hingað til.

Til að kanna hvaða tilgátupróf og öryggisbil eru viðeigandi skulum við skoða aftur aðhvarfsgreiningarlíkanið frá jöfnu (10.1). Ef við gerum ráð fyrir að við höfum n paraðar mælingar $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, má skrifa líkanið sem

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i.$$

Í þessari jöfnu er β_0 hinn sanni skurðpunktur sem við ekki þekkjum, þýðisskurðpunkturinn, og β_1 hin sanna hallatala, þýðishallatalan. β_0 og β_1 eru því lýsistærðir sem við viljum bæði meta og draga ályktanir um. Við sáum hér að framan að hægt er að meta β_0 og β_1 með því að safna saman gögnum og nota aðferð minnstu kvaðrata. Við köllum mötin b_0 og b_1 (jöfnur (10.3) og (10.2)). Síðar í þessum kafla munum við sjá fjölmörg öryggisbil og tilgátupróf sem varða þessa stika. Við eigum hins vegar enn eftir að skoða eina breytu í jöfnunni nánar en það eru stærðinar ε_i.

10.2.1. Slembistærðin ε

Við notum slembistærðina ε til að lýsa þeirri óvissu sem er til staðar í mælingum okkar á Y. Við gerum ráð fyrir að ε_i séu einsdreifðar óháðar slembistærðir sem fylgja normaldreifingu með meðaltal 0 og dreifni σ^2. Við krefjumst þess að ε_i séu óháðar og einsdreifðar, til að tryggja að það sé engin kerfisbundin óvissa í mælingunum okkar og við krefjumst þess að meðaltal þeirra sé 0, því annars værum við markvisst að van- eða ofmeta aðhvarfslínuna.

Líkt og með allar slembistærðir, gefur gildi stika líkindadreifingar ε allar þær upplýsingar sem hægt er að fá um slembistærðina. Munið að normaldreifingin hefur stikana μ og σ^2. Í þessu tilviki vitum við að $\mu = 0$ en við vitum ekki hvert gildi σ^2 er. Mat á σ^2 fæst með því að finna kvaðratsummu leifanna og deila í hana með $(n-2)$.

10.7. Mat á σ^2 í einföldu línulegu aðhvarfi (Estimate of σ^2 in simple linear regression)

Mat á σ^2 í einföldu línulegu aðhvarfi táknum við með s_e^2 og reiknum með

$$s_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}. \tag{10.5}$$

10.2.2. Öryggisbil fyrir β_0 og β_1

Þar sem mælingarnar okkar eru slembni háðar, geta allar ályktanir dregnar út frá þeim breyst í hvert sinn sem tilraunin er endurtekin. Markmið okkar í aðhvarfsgreiningu er að meta stikana β_0 og β_1 í aðhvarfslínunni og því er eðlilegast að skoða hversu nákvæm þau möt eru. Besta leiðin til þess er að skoða öryggisbil fyrir stikana.

10.8. Öryggisbil fyrir β_0 (Confidense interval for β_0)

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils fyrir β_0 er:

$$b_0 - t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{s_x^2 \cdot (n-1)}}. \tag{10.6}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$b_0 + t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{s_x^2 \cdot (n-1)}}. \tag{10.7}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$b_0 - t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{s_x^2 \cdot (n-1)}} < \beta_0 < b_0 + t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(\bar{x})^2}{s_x^2 \cdot (n-1)}} \tag{10.8}$$

þar sem b_0 má reikna með jöfnu (10.3), n er fjöldi paraðra mælinga, $\bar{x}$ er meðaltal skýribreytunnar, s_x er staðalfrávik skýribreytunnar og $t_{1-\alpha/2,(n-2)}$ má finna í t-töflu blaðsíðu 264.

10.9. Öryggisbil fyrir β_1 (Confidense interval for β_1)

Neðra mark $1-\alpha$ öryggisbils fyrir β_1 er:

$$b_1 - t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \frac{1}{\sqrt{s_x^2 \cdot (n-1)}}. \tag{10.9}$$

Efra mark $1-\alpha$ öryggisbils er:

$$b_1 + t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \frac{1}{\sqrt{s_x^2 \cdot (n-1)}}. \tag{10.10}$$

Öryggisbilið má því skrifa:

$$b_1 - t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \frac{1}{\sqrt{s_x^2 \cdot (n-1)}} < \beta_1 < b_1 + t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \frac{1}{\sqrt{s_x^2 \cdot (n-1)}} \tag{10.11}$$

þar sem b_1 má reikna með jöfnu (10.2), n er fjöldi paraðra mælinga, s_x er staðalfrávik skýribreytunnar og $t_{1-\alpha/2,(n-2)}$ má finna í t-töflu blaðsíðu 264.

10.2.3. Spábil fyrir framtíðarmælingar

Við höfum séð að við getum notað aðhvarfslíkanið til að spá fyrir um gildi á Y. Þessi spá er slembni háð, bæði vegna slembni í Y og óvissu í matinu okkar á stikunum. Hér að neðan má sjá hvernig reikna má spábil fyrir framtíðarmælingu á Y (það er að segja mælingu sem ekki hefur verið framkvæmd) fyrir eitthvert gildi $x = x_0$.

10.10. Spábil fyrir framtíðarmælingar (Prediction interval for future observations)

Neðra mark $1-\alpha$ spábils fyrir framtíðarmælingu á Y:

$$(b_0 + b_1 x_0) - t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{s_x^2 (n-1)}} \tag{10.12}$$

Efra mark $1-\alpha$ spábils er:

$$(b_0 + b_1 x_0) + t_{1-\alpha/2,(n-2)} \cdot s_e \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{s_x^2 (n-1)}} \tag{10.13}$$

þar sem b_0 og b_1 má reikna með jöfnum (10.3) og (10.2), n er fjöldi paraðra mælinga, $\bar{x}$ er meðaltal skýribreytunnar, s_x er staðalfrávik skýribreytunnar og $t_{1-\alpha/2,(n-2)}$ má finna í t-töflu blaðsíðu 264.

10.2.4. Próf á fylgnistuðli (ρ)

Við höfum nú séð að b_0 og b_1 eru möt á β_0 og β_1 sem við gátum reiknað út frá úrtakinu okkar. Að sama skapi lítum við svo á að fylgnistuðullinn r sem við reiknum út (sjá kassa 4.21) sé eingöngu mat á sanna fylgnistuðli þýðisins. Við táknum sanna fylgnistuðulinn með ρ sem er bókstafurinn r í gríska stafrófinu. Yfirleitt höfum við áhuga á því að sýna fram á að það sé fylgni á milli breytanna sem við erum að skoða. Það er við viljum geta fullyrt að fylgnin sé ekki 0. Því er núlltilgátan sú að $\rho = 0$.

10.11. Tilgátupróf fyrir ρ
Núlltilgátan er:

$$H_0 : \rho = 0$$

Prófstærðin er:

$$T = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{10.14}$$

Ef núlltilgátan er sönn fylgir prófstærðin t dreifingu með n-2 frígráður, eða $T \sim t_{(n-2)}$.

Gagntilgáta	Hafna H_0 ef:
$H_1 : \rho < 0$	$T < -t_{1-\alpha,(n-2)}$
$H_1 : \rho > 0$	$T > t_{1-\alpha,(n-2)}$
$H_1 : \rho \neq 0$	$T < -t_{1-\alpha/2,(n-2)}$ eða $T > t_{1-\alpha/2,(n-2)}$

Sýnidæmi 10.4: Próf á fylgnistuðli
Atli elskar ís. Af einskærum áhuga gerði hann rannsókn þar sem hann kannaði fylgni veltu ísbúða á einum tilteknum degi við hitastigið úti þann dag. Alls skoðaði hann útkomur fyrir 38 daga sem hann valdi af handahófi yfir árið. Fylgnin milli hitastigs og seldra ísa reyndist vera 0.5 fyrir þetta úrtak. Getur Atli fullyrt að það sé í raun fylgni milli hitastigs og ísáts? Notið $\alpha = 0.05$

Förum eftir leiðbeiningunum um framkvæmd tilgátuprófa:

1. Við ætlum að álykta um fylgni tveggja breyta og notum því tilgátupróf fyrir ρ.

2. Notum $\alpha = 0.05$ eins og gefið er í textanum.

3. Við ætlum að kanna hvort fylgnin sé önnur en núll.

$$\begin{aligned} H_0 &: \quad \rho = 0 \\ H_1 &: \quad \rho \neq 0. \end{aligned}$$

4. Prófstærðina reiknum við með jöfnu (10.14):

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}.$$

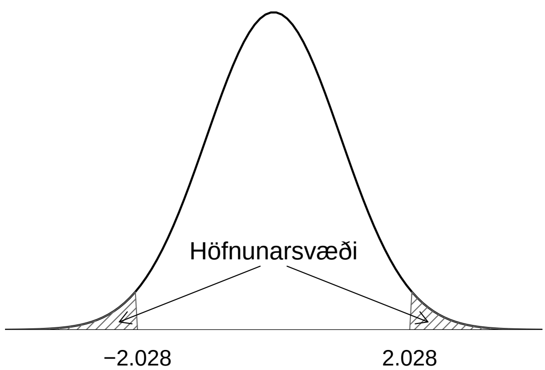
Við höfum að $n = 38$ og $r = 0.5$. Við setjum þessar tölur inn í jöfnurnar og fáum

$$\begin{aligned} t &= \frac{0.5\sqrt{38-2}}{\sqrt{1-0.5^2}} = \frac{0.5\sqrt{36}}{\sqrt{1-0.25}} \\ &= \frac{0.5 \cdot 6}{\sqrt{0.75}} = \frac{3}{\sqrt{0.75}} = 3.46. \end{aligned}$$

5. Við þurfum að finna höfnunarsvæðið og notum til þess t-töflu. Við flettum upp eftir $n - 2 = 36$ frígráðum. $t_{1-\alpha/2,(n-2)} = t_{0.975,(36)} = 2.028$, svo við höfnum núlltilgátunni ef $t > 2.028$ eða $t < -2.028$.

   Við sjáum að $t = 3.46 > 2.028$ svo prófstærðin fellur á höfnunarsvæðið.

6. Við höfnum núlltilgátunni að fylgni milli hitastigs og ísáts sé núll og fullyrðum að það sé fylgni á milli ísáts og hitastigs úti.



10.3. Fervikagreining í aðhvarfsgreiningu

Nota má fervikagreiningu til að draga ályktanir í línulegri aðhvarfgreiningu. Uppsetningin er á margan hátt svipuð og í kafla 9 þegar við notum fervikagreiningu til að draga ályktanir um meðaltöl, en fervikasummurnar eru reiknaðar á örlítið annan hátt. Fyrir sérhverja mælingu y_i gildir að

$$(y_i - \bar{y}_.) = (\hat{y}_i - \bar{y}_.) + (y_i - \hat{y}_i)$$

þar sem $\bar{y}_.$ er meðaltal y-mælinganna og $\hat{y}_i$ er spágildið fyrir y_i.

Þegar aðhvarfsgreiningarlíkan er metið með jöfnu minnstu kvaðrata gildir ennfremur að

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_.)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_.)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

Út frá þessu reiknum við fervikasummur í einföldu línulegu aðhvarfi.

10.12. Fervikasummur í einföldu línulegu aðhvarfi (Sums of squares in a simple linear regression ANOVA)

Fervikasummurnar eru reiknaðar með

$$SS_T = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y}_.)^2 \tag{10.15}$$

$$SS_R = \sum_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \bar{y}_.)^2 \tag{10.16}$$

$$SS_E = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 \tag{10.17}$$

Heildarbreytileikanum má skipta upp í breytileika metnu gildanna annars vegar og breytileika leifanna hins vegar eða

$$SS_T = SS_R + SS_E. \tag{10.18}$$

Algengt er að setja kvaðratsummurnar upp í svokallaða *fervikagreiningartöflu* (ANOVA table). Sú tafla samanstendur af þremur dálkum og þremur línum. Fyrsti dálkurinn inniheldur fervikasummurnar (reiknaðar með jöfnum (10.15) - (10.17)). Annar dálkurinn inniheldur fjölda *frígráða* fyrir hverja fervikasummu fyrir sig en það heiti bera stærðirnar 1, $N-2$ og $N-1$. Þriðji dálkurinn inniheldur svokallaðar meðalfervikasummur. Þær reiknum við með því að deila viðkomandi fervikasummu með fjölda frígráða sem henni tilheyra (í sömu línu). Dæmigerða fervikasummutöflu má sjá hér að neðan.

Fervikasummur	Frígráður	Meðalfervikasummur
SS_R	1	$MS_R = SS_R$
SS_E	$N-2$	$MS_E = \frac{SS_E}{N-2}$
SS_T	$N-1$	

Fervikasummurnar má einnig nota til að reikna skýringarhlutfall með öðrum hætti. Sú framsetning útskýrir jafnvel enn betur hvers vegna r^2 stendur fyrir hlutfallslegan breytileika í Y sem er hægt að skýra með breytingum á x.

10.13. Skýringarhlutfall (R^2)

Skýringarhlutfall má reikna með jöfnunni

$$r^2 = \frac{SSR}{SST}$$

Það stendur fyrir hlutfallslegan breytileika í Y sem er hægt að skýra með breytingum á x.

.

10.3.1. Tilgátupróf í fervikagreiningu fyrir aðhvarfsgreiningu

Tilgátuprófið sem við notum í fervikagreiningu gerir ráð fyrir að frávikin frá aðhvarfslínunni séu i.i.d. normaldreifð. Það skilyrði má kanna með því að teikna normaldreifingarrit af leifunum.

10.14. Tilgátupróf fyrir einhliða fervikagreiningu

Tilgátan sem við viljum kanna er

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

á móti gagntilgátunni

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

Prófstærðin er

$$F = \frac{SS_R/(1)}{SS_E/(N-2)} = \frac{MS_R}{MS_E}. \tag{10.19}$$

þar sem SS_R og SS_E má reikna með jöfnum 10.16 og 9.6. Sé núlltilgátan sönn fylgir prófstærðin F-dreifingu með 1 og $N-2$ fjölda fríráða, eða $F \sim F_{(1,N-2)}$, þar sem N er heildarfjöldi mældra para.

Hafna skal H_0 ef $F > F_{1-\alpha,(1,N-2)}$.

Sé núlltilgátunni hafnað er β_1 frábrugðið núlli.

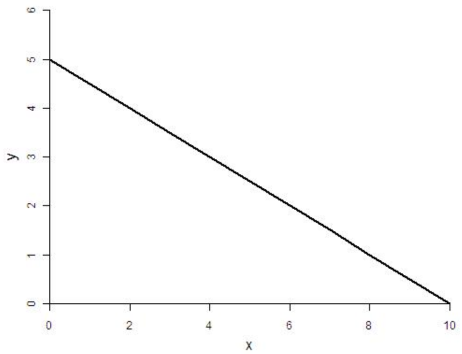
Þetta tilgátupróf er illframkvæmanlegt í höndunum en má reikna á einfaldan hátt í öllum helstu tölfræðiforritum.

Dæmi

Dæmi 10.1
Jöfnu beinnar línu má skrifa sem

$$y = b_0 + b_1 x$$

Hver er gildið á b_0 og b_1 fyrir línuna á myndinni hér að neðan?



Dæmi 10.2
Eftirfarandi tölur sýna aldur lamba (í dögum) og þunga þeirra við vigtun að hausti.

aldur	þungi	aldur	þungi
135	39	120	33
125	37	133	36
130	38	123	34
129	38	126	35
121	34	130	39
125	35	126	38
137	38	140	41
129	36	132	40
121	34	137	44
137	41	137	43

Meðalaldur er 129.65 dagar og staðalfrávik 6.18. Meðalþyngd er 37.65 kg og staðalfrávik 3.10. Fylgnin milli aldurs og þunga er 0.86.

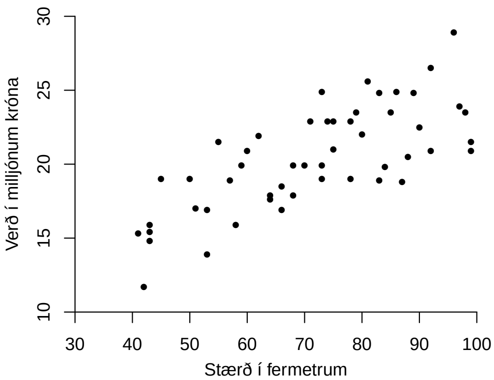
a) Finnið jöfnu aðhvarfslínu fyrir aldur lambanna og þunga þeirra.

b) Hversu mikið af breytileikanum í þunga má skýra með aldri?

c) Hversu mikið breytist þyngdin á 30 dögum skv. aðhvarfsgreiningunni?

d) Spáið fyrir um þyngd lambs sem er 136 daga gamalt og gefið 95% öryggisbil fyrir spána, notið $s_e = 1.64$.

Dæmi 10.3
Sigrún tölfræðingur er að hugsa um að kaupa sér íbúð í 101 Reykjavík. Hún hefur áhuga á íbúðum á bilinu 40 til 100 fermetrar af stærð. Sigrún ákveður því að taka slembiúrtak af stærð 50 af fasteignavef nokkrum. Hún skráir svo niður `verð` (í milljónum króna) og `stærð` (í fermetrum) íbúðanna í þeim tilgangi að skoða sambandið milli verðs og stærðar íbúðanna. Á myndinn hér að neðan má sjá punktrit af gögnunum.



Breyta	Meðaltal	Staðalfrávik
`Verð`	**20.376**	**3.526**
`Stærð`	**71.040**	**16.975**

Fylgnin (correlation) á milli verðs og stærðar er **0.756**.

a) Sigrún ákveður að framkvæma aðhvarfsgreiningu. Er breytan `verð` skýribreyta eða svarbreyta?

b) Hvert er gildið á b_1 í jöfnu aðhvarfslínu minnstu kvaðrata fyrir gögnin hennar Sigrúnar?

c) Hvert er gildið á b_0 í jöfnu aðhvarfslínu minnstu kvaðrata fyrir gögnin hennar Sigrúnar?

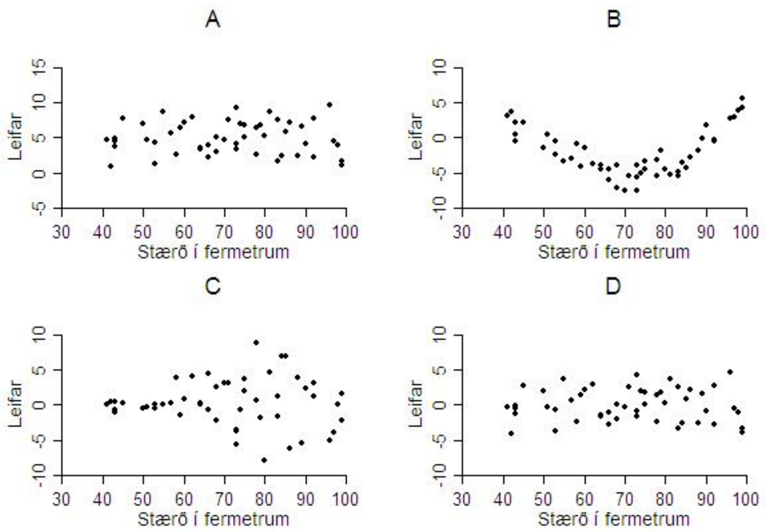
d) Hversu stóran hluta af breytileikanum í verði íbúðanna má skýra með stærð?

e) Sigrún hefur nú áhuga á að spá fyrir hversu mikið íbúð kostar sem er 150 fermetrar af stærð. Væri Sigrún að brúa eða bryggja noti hún aðhvarfslínuna sem hún mat út frá gagnapunktunum 50?

f) Eftir að hafa skoðað íbúðirnar 50 aðeins nánar fellur Sigrún kylliflöt fyrir íbúð á Haðarstíg. Sú íbúð er 96 fermetrar og kostar 28.9 milljónir (sú dýrasta í gagnasafninu). Er leif þeirrar íbúðar jákæð eða neikvæð?

Óli tölfræðingur er uppalinn í Breiðholtinu. Hann og Sigrún eru miklir vinir svo Óli vill eiga Sigrúnu sem nágranna. Óli tekur ekki í mál að búa í 101 Reykjavík svo hann ákveður að kanna samband milli verðs og stærðar íbúða í Breiðholtinu með það markmið að lokka Sigrúnu í Breiðholtið. Óli metur eftirfarandi aðhvarfslíkan út frá 50 íbúðum á bilinu 40 til 100 fermetrar að stærð. Eins og í líkani Sigrúnar þá er verðið í milljónum króna og stærðin í fermetrum.

$$\hat{y} = 7.30 + 0.13x.$$



Mynd 10.8: Hvert er leifarit Óla?

g) Spáið fyrir um verð á 60 fermetra íbúð í Breiðholtinu.

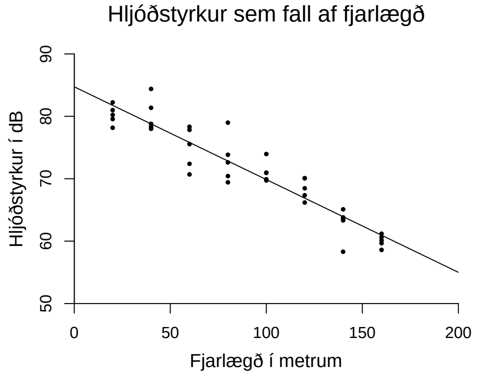
h) Hversu mikið hækkar verð íbúða í Breiðholtinu með hverjum fermetra samkvæmt líkaninu.

i) Af íbúðunum 50 sem Óli hefur skoðað líst honum best á íbúð í Dúfnahólum 10. Hún er 80 fermetrar að stærð og kostar 16.5 milljónir. Hver er gildið á leif þeirrar íbúðar?

j) Óli er mjög fær tölfræðingur. Því getum við gert ráð fyrir að aðhvarfslíkanið hans uppfylli öll skilyrði sem það þarf að uppfylla. Á mynd 10.8 má sjá fjögur leifarit. Hvert leifaritanna er leifarit aðhvarfslíkans Óla?

Dæmi 10.4

Til að rannsaka hljóðmengun á svæðinu í kringum Miklubraut var hljóðmælum komið fyrir með 20 metra millibili frá gatnamótunum Miklabraut - Langahlíð. Tvær breytur eru i gagnasafninu, `Hljóðstyrkur` og `Fjarlægð`.



Þið getið stuðst við eftirfarandi við útreikningana:

Breyta	Meðaltal	Staðalfrávik
Hljóðstyrkur	**71.35**	**7.35**
Fjarlægð	**90.00**	**46.41**

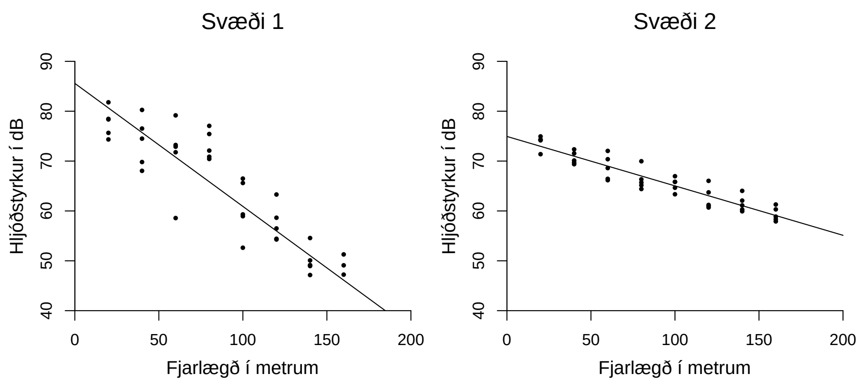
Fylgnin (correlation) á milli hljóðstyrks og fjarlægðar er **-0.94**.

a) Á myndinni hér að ofan má sjá punktrit af gögnunum. Á myndina er einnig búið að teikna línu minnstu kvaðrata (least square line). Hver er jafna þessarar línu? Gefið stikana (parameters) með tveimur aukastöfum (þið eigið að reikna út stærð stikana í jöfnunni ekki lesa þá út frá grafinu).

b) Notið líkanið sem þið fenguð í lið a) til að spá (predict) fyrir um hljóðstyrk 90 metra annars vegar og hins vegar 500 metra frá gatnamótunum. Eru báðar þessar spár áreiðanlegar? Rökstyðjið svar ykkar.

c) Hversu mikinn hluta af breytilekanum í hljóðstyrknum má skýra með fjarlægð frá gatnamótunum?

d) Á myndinni hér að neðan má sjá samsvarandi gögn en frá tveimur öðrum stöðum í borginni. Á hvorum staðnum er sambandið milli hljóðstyrks og fjarlægðar sterkara? Rökstyðjið svarið ykkar.



Dæmi 10.5

Umskrifið jöfnuna fyrir skýringarhlutfall í kassa 10.1.4 til að sýna að hún sé jafngild jöfnunni fyrir skýringarhlutfall í kassa 10.3.

11. kafli

Tvíkosta aðhvarfsgreining

Í kafla 10 kynntumst við því hvernig línuleg aðhvarfsgreining er framkvæmd til að kanna samband svarbreytu og skýribreytu hennar. Línulegri aðhvarfsgreiningu má einungis beita þegar svarbreytan er samfelld en er ekki boðleg þegar svarbreytan er mjög strál. Hins vegar er afar algengt að verkefni okkar fjalli um strjálar svarbreytur og þá sérstaklega *tvíkosta* breytur (e. binary variables), en svo kallast breytur sem taka einungis tvö gildi. Í þeim tilvikum kemur *tvíkosta aðhvarfsgreining* (e. logistic regression) til bjargar.

Við byrjum á að kynnast fræðilegri undirstöðu tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkansins og þá sérstaklega *tengifalli* (e. link function) sem á ensku kallast the logit function í kafla 11.1. Í kafla 11.3 munum við framkvæma tvíkosta aðhvarfsgreiningu þar sem skýribreytan er líka strjál og sjá hvernig gagnlíkindahlutföll skjótast út úr líkaninu. Í kafla 11.2 munum við gera slíkt hið sama fyrir samfelldar skýribreytur. Að lokum verður fjallað um hvernig reikna má líkur út frá metnum stikum í tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkani í kafla 11.4.

11.1. Tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkanið

Í tvíkosta aðhvarfsgreiningu gerum við ráð fyrir að gildin tvö sem svarbreytan getur tekið séu gildin 0 og 1, þ.e.a.s. talan núll stendur fyrir annan möguleikann en talan einn hinn. Til samanburðar gat svarbreytan í línulegri aðhvarfsgreiningu tekið hvaða gildi sem er. Í línulegri aðhvarfsgreiningu lýstum við sambandi svarbreytu og skýribreytu með jöfnu beinnar línu, $y = \beta_0 + \beta_1 x$ (jafna 4.10). Sú framsetning er hins vegar ótæk þegar útkoman er tvíkosta, því þá eru útkomurnar víðsfjarri því að detta á beina línu, gildið á y ás er annað hvort núll eða einn og ekkert þar á milli.

Ein leið til að brúa þetta bil er með aðstoð svokallaðs *tengifalls* (e. link funcion). Algengast er að nota ákveðið tengifall sem á ensku kallast logistic fallið en ekki hefur gengið vel að þýða á íslensku.

11.1. Tengifall (link function)

Tengifallið

$$p(t) = \frac{e^t}{1+e^t} \tag{11.1}$$

varpar hvaða tölu sem er yfir í gildi á milli 0 og 1. Andhverfa þess er

$$g(p) = \log\left(\frac{p}{1-p}\right) \tag{11.2}$$

Með aðstoð tengifallsins opnast nýr möguleiki, með því að stinga útkomunni úr aðhvarfslínunni inn í tengifallið tryggjum við að útkoman verði á milli 0 og 1. Þannig getum við notað aðhvarfsgreiningu til að meta *líkurnar* á að svarbreytan okkar taki gildið 1. Á þessu byggir tvíkosta aðhvarfsgreining.

11.2. Tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkanið (logistic regression model)

Tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkanið er

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon \tag{11.3}$$

þar sem p eru líkurnar á því að svarbreytan taki gildið 1

Takið eftir því að á vinstri hlið jöfnu 11.2 stendur lógarithminn af stærðinni $\frac{p}{1-p}$ sem er einmitt gagnlíkindin á því að svarbreytan taki gildið 1. Gagnlíkindum kynntumst við í kassa 4.5.2 í kafla 4.5.2.

11.2. Tvíkosta aðhvarfsgreining með samfelldri skýribreytu

11.3. Tvíkosta aðhvarf með samfelldri skýribreytu (logistic regression with a continuous explanatory variable)

Gerum ráð fyrir að sambandi skýribreytunnar x og því svarbreyta taki gildið 1 megi lýsa með tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkaninu

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Þá er gagnlíkindahlutfallið á því að svarbreytan taki gildið 1 fyrir hverja a eininga hækkun á skýribreytunni metið með $e^{\hat{\beta}_1 a}$.

Sýnidæmi 11.1: Tvíkosta aðhvarfsgreining með samfelldri skýribreytu
Jói kannar hvort nemendur sem stunda mikla líkamsrækt séu líklegri til að reykja heldur en þeir sem stunda litla líkamsrækt. Hann metur tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkan til að kanna sambandið þar sem skýribreytan er fjöldi klukkustunda sem nemendur stunda líkamsrækt á viku. Hann mat stuðlana sem

$$\hat{\beta}_0 = -1.7428$$
$$\hat{\beta}_1 = -0.1164$$

Hvert er gagnlíkindahlutfall þess að nemandi sem stundar líkamsrækt í 8 klukkustundir á viku reyki sígarettur á móti þeim sem stundar líkamsrækt í 5 klukkustundir á viku?

Fyrri nemandinn stundar $8-5=3$ klukkustundum meiri líkamsrækt í viku heldur en sá seinni. Því er gagnlíkindahlutfall þess að hann reyki á móti hinum nemandanum gefið með

$$e^{\hat{\beta}_1} = e^{-0.1164\cdot 3} = e^{-0.3492} = 0.7052521$$

Þar sem gagnlíkindahlutfallið er minna en einn minnka líkurnar á því að nemendur reyki eftir því sem þeir stunda meiri líkamsrækt.

11.3. Tvíkosta aðhvarfsgreining með strjálli skýribreytu

Þegar skýribreyta tvíkostaaðhvarfsgreiningarlíkans er strál er litið á einn flokk breytunnar sem viðmiðunarflokk en stuðlar líkansins meta frávik frá þessum viðmiðunarflokki.

11.4. Tvíkosta aðhvarf með strjálli skýribreytu (logistic regression with a discrete explanatory variable)

Gerum ráð fyrir að sambandi skýribreytunnar x og því svarbreyta taki gildið 1 megi lýsa með tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkaninu

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_a I_{x=a} + \varepsilon$$

Þar sem $I_{x=a}$ er 1 ef $x=a$ en núll annars. Þá er gagnlíkindahlutfallið á því að svarbreytan taki gildið 1 fyrir þegar skýribreytan x tekur gildið a á móti því þegar hún tekur viðmiðunargildið metið með $e^{\hat{\beta}_a}$.

Sýnidæmi 11.2: Tvíkosta aðhvarfsgreining með strjálli skýribreytu
Guðný kannar hvort nemendur sem drekka áfengi séu líklegri til að reykja heldur en þeir sem ekki drekka áfengi. Hún metur tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkan til að kanna sambandið og metur gildi stuðlanna sem

$$\hat{\beta}_0 = -4.248$$
$$\hat{\beta}_1 = 2.235$$

Þeir nemendur sem ekki drukku áfengi töldust til viðmiðunarflokksins. Hvert er gagnlíkindahlutfall þess að nemandi sem drekkur áfengi reyki sígarettur á móti þeim sem ekki drekkur áfengi?

Gagnlíkindahlutfall þess að nemandi sem drekkur áfengi reyki sígarettur á móti þeim sem ekki drekkur áfengi er gefið með

$$e^{\hat{\beta}_1} = e^{2.235} = 9.346482$$

Þar sem gagnlíkindahlutfallið er stærra en einn eru nemendur sem drekka áfengi líklegri til að reykja heldur en þeir sem ekki drekka áfengi.

11.4. Líkur í tvíkosta aðhvarfsgreiningu

11.5. Tvíkosta aðhvarf og líkur (logistic regression and probability)

Gerum ráð fyrir að sambandi skýribreytunnar x og því svarbreyta taki gildið 1 megi lýsa með tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkaninu

$$\log\left(\frac{p}{1-p}\right) = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon$$

Þá eru líkurnar á því að svarbreytan taki gildið 1 þegar gildi skýribreytunnar er x gefnar með

$$\hat{p} = \frac{e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x}}{1 + e^{\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x}} \tag{11.4}$$

Sýnidæmi 11.3: Líkur í tvíkosta aðhvarfsgreiningu með samfelldri skýribreytu

Jói kannar hvort nemendur sem stunda mikla líkamsrækt séu líklegri til að reykja heldur en þeir sem stunda litla líkamsrækt. Hann metur tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkan til að kanna sambandið þar sem skýribreytan er fjöldi klukkustunda sem nemendur stunda líkamsrækt á viku. Hann mat stuðlana sem

$$\hat{\beta}_0 = -1.7428$$
$$\hat{\beta}_1 = -0.1164$$

Hverjar eru líkur þess að nemandi sem stundar líkamsrækt í 8 klukkustundir á viku reyki sígarettur? En nemanda sem stundar líkamsrækt í 5 klukkustundir á viku?

Líkur þess að nemandi sem stundar líkamsrækt í 8 klukkustundir á viku reyki sígarettur eru gefnar með

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot 8}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot 8}} \\ &= \frac{e^{-1.7428-0.1164\cdot 8}}{1+e^{-1.7428-0.1164\cdot 8}} \\ &= 0.0645251\end{aligned}$$

Líkur þess að nemandi sem stundar líkamsrækt í 5 klukkustundir á viku reyki sígarettur eru gefnar með

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot 5}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot 5}} \\ &= \frac{e^{-1.7428-0.1164\cdot 5}}{1+e^{-1.7428-0.1164\cdot 5}} \\ &= 0.08908976\end{aligned}$$

Sýnidæmi 11.4: Líkur í tvíkosta aðhvarfsgreiningu með strjálli skýribreytu
Guðný kannar hvort nemendur sem drekka áfengi séu líklegri til að reykja heldur en þeir sem ekki drekka áfengi. Hún metur tvíkosta aðhvarfsgreiningarlíkan til að kanna sambandið og metur gildi stuðlanna sem

$$\hat{\beta}_0 = -4.248$$
$$\hat{\beta}_1 = 2.235$$

Þeir nemendur sem ekki drukku áfengi töldust til viðmiðunarflokksins. Hverjar eru líkur þess að nemandi sem drekkur áfengi reyki sígarettur? Hverjar eru líkurnar á því að nemandi sem drekkur ekki áfengi reyki sígarettur

Líkur þess að nemandi sem drekkur áfengi reyki sígarettur eru gefnar með

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x}}{1+e^{\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1 x}}\\ &= \frac{e^{-4.248+2.235}}{1+e^{-4.248+2.235}}\\ &= 0.1178447\end{aligned}$$

Þar sem nemendur sem drekka ekki áfengi tilheyra viðmiðunarhópnum eru líkur þess að þeir reyki sígarettur gefnar með

$$\begin{aligned}\hat{p} &= \frac{e^{\hat{\beta}_0}}{1+e^{\hat{\beta}_0}}\\ &= \frac{e^{-4.248}}{1+e^{-4.248}}\\ &= 0.01409139\end{aligned}$$

Dæmi

Dæmi 11.1
Notið algebru til að leiða út sambandið í kassa 11.2

Dæmi 11.2
Notið algebru til að leiða út sambandið í kassa 11.3

Dæmalausnir

Við hvetjum þig því, lesandi góður, til að fylgjast með fésbókarsíðu bókarinnar `http://www.facebook.com/tolfraedifragrunni` en þar munum við koma á framfæri leiðréttingum á lausnum ef einhverjar verða.

2. kafli

1. a) Talnabreyta. b) Strjál.

2. a) Strjál. b) Strjál. c) Strjál. d) Samfelld. e) Samfelld.

3. Heildarupphæð samfelld talnabreyta. Fæðingarmánuður flokkabreyta. Hvort hún er skráð sem röðuð eða óröðuð fer eftir því hvernig hún mun verða notuð.

4. a) Talnabreyta. b) Flokkabreyta. c) Talnabreyta. d) Flokkabreyta. e) Talnabreyta.

5. Beinþéttni samfelld talnabreyta. Hreyfing og mjólkurvörur sem raðaðar flokkabreytur.

6. Samfelld talnabreyta.

8. Systkin er strjál talnabreyta. Barrnálar eru strangt til tekið strjál talnabreyta en þó væri sennilega auðveldara að meðhöndla hana sem samfellda.

9. Óröðuð flokkabreyta.

10. Lagskipt slembiúrtak.

11. Úrtakið er sjálfboðaliðaúrtak og getur því getur verið mikill úrtaksbjagi í mælingunum.

12. a) Parað slembiúrtak. b) Það er ekki hugað að blindni og því getur verið rannsakandabjagi.

13. Úrtakið er sjálfboðaliðaúrtak og því getur verið mikill úrtaksbjagi í mælingunum. Úrtakið er einnig aðgengisúrtak.

14. Hún veit hve marga veitingastaði gestirnir hafa heimsótt áður en hún skráir niður klæðaburðinn og því getur verið mikill rannsakandabjagi. Takið eftir að smekkvísi ferðamannanna er hennar mat.

15. Eina leiðin til að fullyrða um orsakasamband er með stýrðri tilraun svo Einar getur ekki fullyrt að sjónvarpsáhorf valdi offitu. Hann getur samt fullyrt að það sé samband þar á milli.

3. kafli

1. Svarmöguleiki a).

2. U.þ.b. 10.

3. Á milli 3.5 og 4.

4. Svarmöguleiki c).

5. Minnsta gildi = 13, $Q_1 = 15$, $Q_2 = 17$, $Q_3 = 20$, hæsta gildi= 23.

4. kafli

1. a) $\bar{x} = 166.6$, $Q_1 = 156.5$, $Q_2 = M = 162$, $Q_3 = 179$ (ef reiknað í R: $Q_1 = 158$, $Q_2 = 162$, $Q_3 = 173$), $s^2 = 152.3$, $s = 12.34$, spönn = 30, fráviksshlutfall = 0.074, fimm tölu samantekt: 155, 156.5, 162, 179, 185. b) Nei.

2. $Q_1 = 226$, $Q_2 = M = 277$, $Q_3 = 312$.

3. 8.47

4. Svarmöguleiki a).

5. 1

6. a) 2.33 b) 1.22 c) 1.91

7. a) 0.59 b) 0.075 c) 5.29 d) 7.80

8. b) næmi = 0.95, sértæki = 0.95 c) jákvætt forspárgildi = 0.087, neikvætt forspárgildi = 0.9997

9. næmi = 0.98, sértæki = 0.875 jákvætt forspárgildi = 0.972, neikvætt forspárgildi = 0.907

10. sértæki

11. 1.96

12. a) Þegar FN < FJ b) Þegar FJ < FN

5. kafli

1. 28

2. $n = 4$ og $p = 1/3$

3. a) 0.104 b) 0.865 c) 0.865 d) 0.004

4. a) 0.091 b) 0.096

5. 0.86

6. a) Tvíkostadreifingu með $n = 20$ og $p = 0.1$. b) 2 c) 0.19.

7. a) Poisson dreifingu með $\lambda = 0.8$. b) 0.14 c) 0.06

8. 0.31

9. 35

10. a) 0.21 b) 0.69 c) 0.22 d) 0.14 e) 0.15

11. a) 0.077 b) 0.087 c) 0.337 d) 0.683

12. a) 0.165 b) 0.268 c) 0.463 d) 0.835

13. a) 0.165 b) 0.463

14. a) 1.96, -1.28, -1.645, 1.645,

b) 1.684, 1.638, 2.110, - 1.782.

c) 3.841, 0.103, 30.191, 11.345.

d) 2.348, 2.201, 4.011, 10.97.

15. a) 0.2061 b) 0.9750 c) 0.950 d) 0.5.

16. 1

17. a) 0.9938, b) 0.9938, c) 0.0062, d) 0.

18. a) 0.3605 b) 0.0007 c) 0.1610 d) 0.0605 e) 0.

19. 1.90.

20. a) 0 b) 0.2061 c) 0.1643 d) 0.0202 e) 11.02 f) 6.35.

21. a) 0.1056 b) 0.6301 c) 120.50.

22. $\mu = 10, \sigma^2 = 16$.

23. a) 0.0571 b) 0.1220 c) 0.8212 d) 0 e) 90.37.

6. kafli

1. 1.

2. a) $X \sim N(200, 30^2)$ b) $\bar{X} \sim N(200, 3^2)$ c) $\bar{Y} \sim N(3, 1/40)$ skv. höfuðsetningu tölfræðinnar.

3. $\bar{X} \sim N(1.2, 1.2/40)$ skv. höfuðsetningu tölfræðinnar.

4. $\bar{X} \sim N(15, 9/25)$.

5. a) 5.4% b) $\frac{1}{\sqrt{8}}$ %.

6. a) 180 b) 10 c) $\sqrt{10}$ d) $\bar{X} \sim N(180, 10)$.

7. $\bar{X} \sim N(200, 416.67)$.

8. a) $\bar{X} \sim N(15, 25/12)$ b) 1.44.

9. a) 5% b) Nei, p-gildi > 0.05.

10. 10%

11. Já, p-gildi < 0.05.

12. d)

13. Öryggisbilið hans Jóa verður breiðara (n er minna).

14. a) Hún getur ekki hafnað núlltilgátunni og getur því ekki ályktað neitt. b) Hún hafnar núlltilgátunni og dregur þá ályktun að munur sé á meðalneyslu milli áranna.

15. a) Hann hafnar núlltilgátunni og dregur þá ályktun að umferðin er meiri í mars en apríl. b) sömu ályktun og í a). c) Villa af gerð I.

16. a) 10 b) 10 c) 10

17. a) Nei, öryggisbilið inniheldur 0. b) Nei. c) Nei.

18. a) 0.1469. P-gildið er stærra en α svo við getum ekki hafnað H_0. b) 0.0233. P-gildið er minna en α svo við getum hafnað H_0. c) 0.0340. P-gildið er minna en α svo við getum hafnað H_0. d) 0.1770. P-gildið er stærra en α svo við getum ekki hafnað H_0.

7. kafli

1. Prófstærðin er 2.41 sem er stærra en 1.96 svo við höfnum H_0 og ályktum að það sé munur.

2. $0.61 < p < 0.65$.

3. a) 40.2 b) 3.64 c) Það er samband á milli þess hvort fólk á börn og hvort það sé í fullu námi.

4. 9.

5. a) 0.573 b) 0.537

6. a) 0.16 b) $z < -1.96$ eða $z > 1.96$.

7. a) 0.52. b) $0.45 < p < 0.59$

8. Gildið á prófstærðinni er 2.57 sem er stærra en 1.96 svo við höfnum H_0.

9. Gildið á prófstærðinni er 6.43 sem er stærra en 5.99 svo við höfnum H_0.

8. kafli

1. $13.71 < \sigma^2 < 129.9$

2. 2.25

3. 33865.95

4. Prófstærðin er 1.32. Berum saman við $F_{0.975,(6,6)} = 5.82$. Gildið á prófstærðinni er minni en F, svo við getum ekki hafnað H_0 og drögum enga ályktun.

5. Hér er hægt að nota z- eða t-öryggisbil. z: $37.68 < \mu < 39.92$. t: $37.65 < \mu < 39.94$

6. a) t-öryggisbil: $8.71 < \mu < 15.89$ b) t = 1.51. Við getum ekki hafnað H_0.

7. z = -2.21 svo við höfnum H_0.

8. t-öryggisbil: $1.79 < \mu < 3.61$

9. Hér má nota z- eða t-próf. z = -16.67 svo við höfnum H_0.

10. a) t-öryggisbil: $231.45 < \mu < 242.67$. b) t = -1.107 svo við getum ekki hafnað H_0.

11. t-öryggisbil: $201.11 < \mu < 209.29$

12. Hér má nota z- eða t-próf. t = 2.81 svo við höfnum H_0.

13. a) Hér má nota z- eða t-öryggisbil/próf, notum z- hér. Hér er miðað við að suðurland sé þýði 1. $-11.69 < \mu_1 - \mu_2 < -4.31$.
b) $z = -4.24$, sem er minna en $-z_{0.975} = -1.96$. Við getum hafnað núlltilgátunni og ályktað að munur sé á skjálftavirkni eftir landshlutum.

14. Notum t-próf (jöfn dreifni). Hér er miðað við að kvenkyn sé þýði 1. $t = 2.83$ sem er stærra en $t_{0.975,(18)} = 2.10$ svo við getum hafnað H_0 og fullyrt að munur sé á hjartslætti karlkyns og kvenkyns músa.

15. Notum t-próf (jöfn dreifni). Hér er miðað við að togari 1 sé þýði 1. $t = -0.115$ sem er ekki minna en $-t_{0.975,(10)} = -2.228$ svo við getum ekki hafnað H_0 og drögum enga ályktun.

16. T-próf fyrir paraðar mælingar. Hér er notað d = venjuleg - nagla. $t = 1.23$ sem er ekki stærra en $t_{0.975,(5)} = 2.57$ svo við getum ekki hafnað H_0 og drögum enga ályktun.

17. T-próf fyrir paraðar mælingar. Hér er notað d = fyrir - eftir. $t = -3.01$ sem er minna en $-t_{0.975,(5)} = -2.57$ svo við getum hafnað H_0 og dregið þá ályktun að göngutúr í köldu veðri hækki PEFR skor.

18. a) Notum z-öryggisbil. 1.27. b) $H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$, sem er jafngilt $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$.

19. Notum t-próf (jöfn dreifni). Hér er miðað við að bjór x sé þýði 1. $t = 2.34$ sem er ekki stærra en $t_{0.995,(8)} = 3.36$ svo við getum ekki hafnað H_0 og drögum enga ályktun.

20. T-próf fyrir paraðar mælingar. Hér er notað d = fyrir - eftir. $t = -3.74$ sem er minna en $-t_{0.95,4} = -2.132$ svo við getum hafnað H_0 og dregið þá ályktun að hjartsláttur aukist við hlaupin. Ef framkvæmt er tvíhliða próf er miðað við $-t_{0.975,4} = -2.776$.

9. kafli

1. Hafna skal H_0 ef $f > F_{1-\alpha,(a-1,N-a)}$. $a = 4, N = 4 \cdot 8 = 32$. Svo hafna skal ef $F > F_{0.95,(3,28)} = 2.947$

2. $SS_E = 2149.73 - 1103.33 = 1046.4$. $MS_{TR} = 1103.33/2 = 551.67$, $MS_E = 1046.4/12 = 87.2$. Gildið á prófstærðinni er $f = 551.67/87.2 = 6.33$. Höfnum ef f > 3.885, svo við höfnum og ályktum að a.m.k eitt meðaltalið er frábrugðið hinum.

3. $f = 15.04/4.18 = 3.60$. Við höfnum H_0 og ályktum að a.m.k eitt meðaltalið er frábrugðið hinum.

4. a) 5.32 b) 10.55.

10. kafli

1. a) $b_0 = 5, b_1 = -0.5$.

2. a) $\hat{y} = -18.28 + 0.43x$. b) $r^2 = 0.74$, svo um 74%. c) 12.94 kg. d) $\hat{y}_{x=136} = 40.39$. $36.78 < \hat{y} < 44.00$.

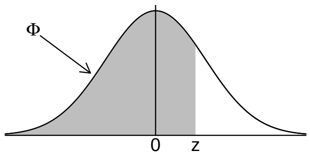
3. a) `verð` er svarbreyta. b) $b_1 = 0.157$. c) $b_1 = 9.220$. d) um 57%. e) Sigrún væri að bryggja. f) Leifin er jákvæð. g) 15.1 milljón. h) 0.13 milljónir (hallatalan). i) -1.2. j) Leifarit d.

4. a) $\hat{y} = 84.75 - 0.15x$. b) $\hat{y}_{x=90} = 71.35$ (áreiðanleg, brúun), $\hat{y}_{x=500} = 10.31$ (ekki áreiðanleg, bryggjun). c) um 88%. d) Á svæði 2. Punktarnir liggja þéttar upp að aðhvarfslínunni en á svæði 1 (hærri fylgni).

Töflur

Stöðluð normaldreifing	260 - 263
t-dreifing	264
χ^2-dreifing	265
F-dreifing	266-269

Normaldreifing - neikvæð z-gildi

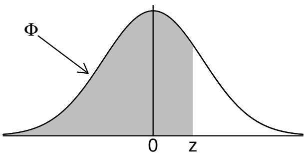


Taflan gefur gildi á Φ, það er líkurnar á að Z taki gildi sem er minna en z, þar sem Z fylgir normaldreifingu með meðaltal 0 og staðalfrávik 1.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
-3.50	0.0002	**-3.15**	0.0008	**-2.80**	0.0026	**-2.45**	0.0071
-3.49	0.0002	**-3.14**	0.0008	**-2.79**	0.0026	**-2.44**	0.0073
-3.48	0.0003	**-3.13**	0.0009	**-2.78**	0.0027	**-2.43**	0.0075
-3.47	0.0003	**-3.12**	0.0009	**-2.77**	0.0028	**-2.42**	0.0078
-3.46	0.0003	**-3.11**	0.0009	**-2.76**	0.0029	**-2.41**	0.0080
-3.45	0.0003	**-3.10**	0.0010	**-2.75**	0.0030	**-2.40**	0.0082
-3.44	0.0003	**-3.09**	0.0010	**-2.74**	0.0031	**-2.39**	0.0084
-3.43	0.0003	**-3.08**	0.0010	**-2.73**	0.0032	**-2.38**	0.0087
-3.42	0.0003	**-3.07**	0.0011	**-2.72**	0.0033	**-2.37**	0.0089
-3.41	0.0003	**-3.06**	0.0011	**-2.71**	0.0034	**-2.36**	0.0091
-3.40	0.0003	**-3.05**	0.0011	**-2.70**	0.0035	**-2.35**	0.0094
-3.39	0.0003	**-3.04**	0.0012	**-2.69**	0.0036	**-2.34**	0.0096
-3.38	0.0004	**-3.03**	0.0012	**-2.68**	0.0037	**-2.33**	0.0099
-3.37	0.0004	**-3.02**	0.0013	**-2.67**	0.0038	**-2.32**	0.0102
-3.36	0.0004	**-3.01**	0.0013	**-2.66**	0.0039	**-2.31**	0.0104
-3.35	0.0004	**-3.00**	0.0013	**-2.65**	0.0040	**-2.30**	0.0107
-3.34	0.0004	**-2.99**	0.0014	**-2.64**	0.0041	**-2.29**	0.0110
-3.33	0.0004	**-2.98**	0.0014	**-2.63**	0.0043	**-2.28**	0.0113
-3.32	0.0005	**-2.97**	0.0015	**-2.62**	0.0044	**-2.27**	0.0116
-3.31	0.0005	**-2.96**	0.0015	**-2.61**	0.0045	**-2.26**	0.0119
-3.30	0.0005	**-2.95**	0.0016	**-2.60**	0.0047	**-2.25**	0.0122
-3.29	0.0005	**-2.94**	0.0016	**-2.59**	0.0048	**-2.24**	0.0125
-3.28	0.0005	**-2.93**	0.0017	**-2.58**	0.0049	**-2.23**	0.0129
-3.27	0.0005	**-2.92**	0.0018	**-2.57**	0.0051	**-2.22**	0.0132
-3.26	0.0006	**-2.91**	0.0018	**-2.56**	0.0052	**-2.21**	0.0136
-3.25	0.0006	**-2.90**	0.0019	**-2.55**	0.0054	**-2.20**	0.0139
-3.24	0.0006	**-2.89**	0.0019	**-2.54**	0.0055	**-2.19**	0.0143
-3.23	0.0006	**-2.88**	0.0020	**-2.53**	0.0057	**-2.18**	0.0146
-3.22	0.0006	**-2.87**	0.0021	**-2.52**	0.0059	**-2.17**	0.0150
-3.21	0.0007	**-2.86**	0.0021	**-2.51**	0.0060	**-2.16**	0.0154
-3.20	0.0007	**-2.85**	0.0022	**-2.50**	0.0062	**-2.15**	0.0158
-3.19	0.0007	**-2.84**	0.0023	**-2.49**	0.0064	**-2.14**	0.0162
-3.18	0.0007	**-2.83**	0.0023	**-2.48**	0.0066	**-2.13**	0.0166
-3.17	0.0008	**-2.82**	0.0024	**-2.47**	0.0068	**-2.12**	0.0170
-3.16	0.0008	**-2.81**	0.0025	**-2.46**	0.0069	**-2.11**	0.0174

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
-2.10	0.0179	**-1.65**	0.0495	**-1.20**	0.1151	**-0.75**	0.2266	**-0.30**	0.3821
-2.09	0.0183	**-1.64**	0.0505	**-1.19**	0.1170	**-0.74**	0.2296	**-0.29**	0.3859
-2.08	0.0188	**-1.63**	0.0516	**-1.18**	0.1190	**-0.73**	0.2327	**-0.28**	0.3897
-2.07	0.0192	**-1.62**	0.0526	**-1.17**	0.1210	**-0.72**	0.2358	**-0.27**	0.3936
-2.06	0.0197	**-1.61**	0.0537	**-1.16**	0.1230	**-0.71**	0.2389	**-0.26**	0.3974
-2.05	0.0202	**-1.60**	0.0548	**-1.15**	0.1251	**-0.70**	0.2420	**-0.25**	0.4013
-2.04	0.0207	**-1.59**	0.0559	**-1.14**	0.1271	**-0.69**	0.2451	**-0.24**	0.4052
-2.03	0.0212	**-1.58**	0.0571	**-1.13**	0.1292	**-0.68**	0.2483	**-0.23**	0.4090
-2.02	0.0217	**-1.57**	0.0582	**-1.12**	0.1314	**-0.67**	0.2514	**-0.22**	0.4129
-2.01	0.0222	**-1.56**	0.0594	**-1.11**	0.1335	**-0.66**	0.2546	**-0.21**	0.4168
-2.00	0.0228	**-1.55**	0.0606	**-1.10**	0.1357	**-0.65**	0.2578	**-0.20**	0.4207
-1.99	0.0233	**-1.54**	0.0618	**-1.09**	0.1379	**-0.64**	0.2611	**-0.19**	0.4247
-1.98	0.0239	**-1.53**	0.0630	**-1.08**	0.1401	**-0.63**	0.2643	**-0.18**	0.4286
-1.97	0.0244	**-1.52**	0.0643	**-1.07**	0.1423	**-0.62**	0.2676	**-0.17**	0.4325
-1.96	0.0250	**-1.51**	0.0655	**-1.06**	0.1446	**-0.61**	0.2709	**-0.16**	0.4364
-1.95	0.0256	**-1.50**	0.0668	**-1.05**	0.1469	**-0.60**	0.2743	**-0.15**	0.4404
-1.94	0.0262	**-1.49**	0.0681	**-1.04**	0.1492	**-0.59**	0.2776	**-0.14**	0.4443
-1.93	0.0268	**-1.48**	0.0694	**-1.03**	0.1515	**-0.58**	0.2810	**-0.13**	0.4483
-1.92	0.0274	**-1.47**	0.0708	**-1.02**	0.1539	**-0.57**	0.2843	**-0.12**	0.4522
-1.91	0.0281	**-1.46**	0.0721	**-1.01**	0.1562	**-0.56**	0.2877	**-0.11**	0.4562
-1.90	0.0287	**-1.45**	0.0735	**-1.00**	0.1587	**-0.55**	0.2912	**-0.10**	0.4602
-1.89	0.0294	**-1.44**	0.0749	**-0.99**	0.1611	**-0.54**	0.2946	**-0.09**	0.4641
-1.88	0.0301	**-1.43**	0.0764	**-0.98**	0.1635	**-0.53**	0.2981	**-0.08**	0.4681
-1.87	0.0307	**-1.42**	0.0778	**-0.97**	0.1660	**-0.52**	0.3015	**-0.07**	0.4721
-1.86	0.0314	**-1.41**	0.0793	**-0.96**	0.1685	**-0.51**	0.3050	**-0.06**	0.4761
-1.85	0.0322	**-1.40**	0.0808	**-0.95**	0.1711	**-0.50**	0.3085	**-0.05**	0.4801
-1.84	0.0329	**-1.39**	0.0823	**-0.94**	0.1736	**-0.49**	0.3121	**-0.04**	0.4840
-1.83	0.0336	**-1.38**	0.0838	**-0.93**	0.1762	**-0.48**	0.3156	**-0.03**	0.4880
-1.82	0.0344	**-1.37**	0.0853	**-0.92**	0.1788	**-0.47**	0.3192	**-0.02**	0.4920
-1.81	0.0351	**-1.36**	0.0869	**-0.91**	0.1814	**-0.46**	0.3228	**-0.01**	0.4960
-1.80	0.0359	**-1.35**	0.0885	**-0.90**	0.1841	**-0.45**	0.3264		
-1.79	0.0367	**-1.34**	0.0901	**-0.89**	0.1867	**-0.44**	0.3300		
-1.78	0.0375	**-1.33**	0.0918	**-0.88**	0.1894	**-0.43**	0.3336		
-1.77	0.0384	**-1.32**	0.0934	**-0.87**	0.1922	**-0.42**	0.3372		
-1.76	0.0392	**-1.31**	0.0951	**-0.86**	0.1949	**-0.41**	0.3409		
-1.75	0.0401	**-1.30**	0.0968	**-0.85**	0.1977	**-0.40**	0.3446		
-1.74	0.0409	**-1.29**	0.0985	**-0.84**	0.2005	**-0.39**	0.3483		
-1.73	0.0418	**-1.28**	0.1003	**-0.83**	0.2033	**-0.38**	0.3520		
-1.72	0.0427	**-1.27**	0.1020	**-0.82**	0.2061	**-0.37**	0.3557		
-1.71	0.0436	**-1.26**	0.1038	**-0.81**	0.2090	**-0.36**	0.3594		
-1.70	0.0446	**-1.25**	0.1056	**-0.80**	0.2119	**-0.35**	0.3632		
-1.69	0.0455	**-1.24**	0.1075	**-0.79**	0.2148	**-0.34**	0.3669		
-1.68	0.0465	**-1.23**	0.1093	**-0.78**	0.2177	**-0.33**	0.3707		
-1.67	0.0475	**-1.22**	0.1112	**-0.77**	0.2206	**-0.32**	0.3745		
-1.66	0.0485	**-1.21**	0.1131	**-0.76**	0.2236	**-0.31**	0.3783		

Normaldreifing - jákvæð z-gildi

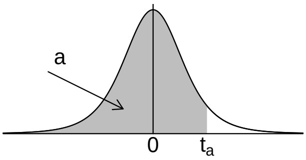


Taflan gefur gildi á Φ, það er líkurnar á að Z taki gildi sem er minna en z, þar sem Z fylgir normaldreifingu með meðaltal 0 og staðalfrávik 1.

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0.00	0.5000	**0.35**	0.6368	**0.70**	0.7580	**1.05**	0.8531
0.01	0.5040	**0.36**	0.6406	**0.71**	0.7611	**1.06**	0.8554
0.02	0.5080	**0.37**	0.6443	**0.72**	0.7642	**1.07**	0.8577
0.03	0.5120	**0.38**	0.6480	**0.73**	0.7673	**1.08**	0.8599
0.04	0.5160	**0.39**	0.6517	**0.74**	0.7704	**1.09**	0.8621
0.05	0.5199	**0.40**	0.6554	**0.75**	0.7734	**1.10**	0.8643
0.06	0.5239	**0.41**	0.6591	**0.76**	0.7764	**1.11**	0.8665
0.07	0.5279	**0.42**	0.6628	**0.77**	0.7794	**1.12**	0.8686
0.08	0.5319	**0.43**	0.6664	**0.78**	0.7823	**1.13**	0.8708
0.09	0.5359	**0.44**	0.6700	**0.79**	0.7852	**1.14**	0.8729
0.10	0.5398	**0.45**	0.6736	**0.80**	0.7881	**1.15**	0.8749
0.11	0.5438	**0.46**	0.6772	**0.81**	0.7910	**1.16**	0.8770
0.12	0.5478	**0.47**	0.6808	**0.82**	0.7939	**1.17**	0.8790
0.13	0.5517	**0.48**	0.6844	**0.83**	0.7967	**1.18**	0.8810
0.14	0.5557	**0.49**	0.6879	**0.84**	0.7995	**1.19**	0.8830
0.15	0.5596	**0.50**	0.6915	**0.85**	0.8023	**1.20**	0.8849
0.16	0.5636	**0.51**	0.6950	**0.86**	0.8051	**1.21**	0.8869
0.17	0.5675	**0.52**	0.6985	**0.87**	0.8078	**1.22**	0.8888
0.18	0.5714	**0.53**	0.7019	**0.88**	0.8106	**1.23**	0.8907
0.19	0.5753	**0.54**	0.7054	**0.89**	0.8133	**1.24**	0.8925
0.20	0.5793	**0.55**	0.7088	**0.90**	0.8159	**1.25**	0.8944
0.21	0.5832	**0.56**	0.7123	**0.91**	0.8186	**1.26**	0.8962
0.22	0.5871	**0.57**	0.7157	**0.92**	0.8212	**1.27**	0.8980
0.23	0.5910	**0.58**	0.7190	**0.93**	0.8238	**1.28**	0.8997
0.24	0.5948	**0.59**	0.7224	**0.94**	0.8264	**1.29**	0.9015
0.25	0.5987	**0.60**	0.7257	**0.95**	0.8289	**1.30**	0.9032
0.26	0.6026	**0.61**	0.7291	**0.96**	0.8315	**1.31**	0.9049
0.27	0.6064	**0.62**	0.7324	**0.97**	0.8340	**1.32**	0.9066
0.28	0.6103	**0.63**	0.7357	**0.98**	0.8365	**1.33**	0.9082
0.29	0.6141	**0.64**	0.7389	**0.99**	0.8389	**1.34**	0.9099
0.30	0.6179	**0.65**	0.7422	**1.00**	0.8413	**1.35**	0.9115
0.31	0.6217	**0.66**	0.7454	**1.01**	0.8438	**1.36**	0.9131
0.32	0.6255	**0.67**	0.7486	**1.02**	0.8461	**1.37**	0.9147
0.33	0.6293	**0.68**	0.7517	**1.03**	0.8485	**1.38**	0.9162
0.34	0.6331	**0.69**	0.7549	**1.04**	0.8508	**1.39**	0.9177

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1.40	0.9192	**1.85**	0.9678	**2.30**	0.9893	**2.75**	0.9970	**3.20**	0.9993
1.41	0.9207	**1.86**	0.9686	**2.31**	0.9896	**2.76**	0.9971	**3.21**	0.9993
1.42	0.9222	**1.87**	0.9693	**2.32**	0.9898	**2.77**	0.9972	**3.22**	0.9994
1.43	0.9236	**1.88**	0.9699	**2.33**	0.9901	**2.78**	0.9973	**3.23**	0.9994
1.44	0.9251	**1.89**	0.9706	**2.34**	0.9904	**2.79**	0.9974	**3.24**	0.9994
1.45	0.9265	**1.90**	0.9713	**2.35**	0.9906	**2.80**	0.9974	**3.25**	0.9994
1.46	0.9279	**1.91**	0.9719	**2.36**	0.9909	**2.81**	0.9975	**3.26**	0.9994
1.47	0.9292	**1.92**	0.9726	**2.37**	0.9911	**2.82**	0.9976	**3.27**	0.9995
1.48	0.9306	**1.93**	0.9732	**2.38**	0.9913	**2.83**	0.9977	**3.28**	0.9995
1.49	0.9319	**1.94**	0.9738	**2.39**	0.9916	**2.84**	0.9977	**3.29**	0.9995
1.50	0.9332	**1.95**	0.9744	**2.40**	0.9918	**2.85**	0.9978	**3.30**	0.9995
1.51	0.9345	**1.96**	0.9750	**2.41**	0.9920	**2.86**	0.9979	**3.31**	0.9995
1.52	0.9357	**1.97**	0.9756	**2.42**	0.9922	**2.87**	0.9979	**3.32**	0.9995
1.53	0.9370	**1.98**	0.9761	**2.43**	0.9925	**2.88**	0.9980	**3.33**	0.9996
1.54	0.9382	**1.99**	0.9767	**2.44**	0.9927	**2.89**	0.9981	**3.34**	0.9996
1.55	0.9394	**2.00**	0.9772	**2.45**	0.9929	**2.90**	0.9981	**3.35**	0.9996
1.56	0.9406	**2.01**	0.9778	**2.46**	0.9931	**2.91**	0.9982	**3.36**	0.9996
1.57	0.9418	**2.02**	0.9783	**2.47**	0.9932	**2.92**	0.9982	**3.37**	0.9996
1.58	0.9429	**2.03**	0.9788	**2.48**	0.9934	**2.93**	0.9983	**3.38**	0.9996
1.59	0.9441	**2.04**	0.9793	**2.49**	0.9936	**2.94**	0.9984	**3.39**	0.9997
1.60	0.9452	**2.05**	0.9798	**2.50**	0.9938	**2.95**	0.9984	**3.40**	0.9997
1.61	0.9463	**2.06**	0.9803	**2.51**	0.9940	**2.96**	0.9985	**3.41**	0.9997
1.62	0.9474	**2.07**	0.9808	**2.52**	0.9941	**2.97**	0.9985	**3.42**	0.9997
1.63	0.9484	**2.08**	0.9812	**2.53**	0.9943	**2.98**	0.9986	**3.43**	0.9997
1.64	0.9495	**2.09**	0.9817	**2.54**	0.9945	**2.99**	0.9986	**3.44**	0.9997
1.65	0.9505	**2.10**	0.9821	**2.55**	0.9946	**3.00**	0.9987	**3.45**	0.9997
1.66	0.9515	**2.11**	0.9826	**2.56**	0.9948	**3.01**	0.9987	**3.46**	0.9997
1.67	0.9525	**2.12**	0.9830	**2.57**	0.9949	**3.02**	0.9987	**3.47**	0.9997
1.68	0.9535	**2.13**	0.9834	**2.58**	0.9951	**3.03**	0.9988	**3.48**	0.9997
1.69	0.9545	**2.14**	0.9838	**2.59**	0.9952	**3.04**	0.9988	**3.49**	0.9998
1.70	0.9554	**2.15**	0.9842	**2.60**	0.9953	**3.05**	0.9989	**3.50**	0.9998
1.71	0.9564	**2.16**	0.9846	**2.61**	0.9955	**3.06**	0.9989		
1.72	0.9573	**2.17**	0.9850	**2.62**	0.9956	**3.07**	0.9989		
1.73	0.9582	**2.18**	0.9854	**2.63**	0.9957	**3.08**	0.9990		
1.74	0.9591	**2.19**	0.9857	**2.64**	0.9959	**3.09**	0.9990		
1.75	0.9599	**2.20**	0.9861	**2.65**	0.9960	**3.10**	0.9990		
1.76	0.9608	**2.21**	0.9864	**2.66**	0.9961	**3.11**	0.9991		
1.77	0.9616	**2.22**	0.9868	**2.67**	0.9962	**3.12**	0.9991		
1.78	0.9625	**2.23**	0.9871	**2.68**	0.9963	**3.13**	0.9991		
1.79	0.9633	**2.24**	0.9875	**2.69**	0.9964	**3.14**	0.9992		
1.80	0.9641	**2.25**	0.9878	**2.70**	0.9965	**3.15**	0.9992		
1.81	0.9649	**2.26**	0.9881	**2.71**	0.9966	**3.16**	0.9992		
1.82	0.9656	**2.27**	0.9884	**2.72**	0.9967	**3.17**	0.9992		
1.83	0.9664	**2.28**	0.9887	**2.73**	0.9968	**3.18**	0.9993		
1.84	0.9671	**2.29**	0.9890	**2.74**	0.9969	**3.19**	0.9993		

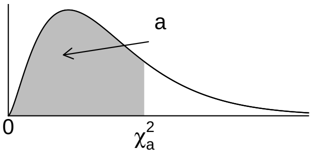
t-dreifing



Taflan gefur t_a. Um t_a gildir að slembistærð sem fylgir t-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar a að taka gildi sem er minna en t_a.

$a =$	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.999	0.9995
k										
1	1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	318.3	636.6
2	0.8165	1.061	1.386	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	22.33	31.6
3	0.7649	0.9785	1.25	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	10.21	12.92
4	0.7407	0.941	1.19	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	7.173	8.61
5	0.7267	0.9195	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5.893	6.869
6	0.7176	0.9057	1.134	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.208	5.959
7	0.7111	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.785	5.408
8	0.7064	0.8889	1.108	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	4.501	5.041
9	0.7027	0.8834	1.1	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.297	4.781
10	0.6998	0.8791	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.144	4.587
11	0.6974	0.8755	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.025	4.437
12	0.6955	0.8726	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.93	4.318
13	0.6938	0.8702	1.079	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	3.852	4.221
14	0.6924	0.8681	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.787	4.14
15	0.6912	0.8662	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.733	4.073
16	0.6901	0.8647	1.071	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	3.686	4.015
17	0.6892	0.8633	1.069	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.646	3.965
18	0.6884	0.862	1.067	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.61	3.922
19	0.6876	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.579	3.883
20	0.687	0.86	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.552	3.85
21	0.6864	0.8591	1.063	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.527	3.819
22	0.6858	0.8583	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.505	3.792
23	0.6853	0.8575	1.06	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.485	3.768
24	0.6848	0.8569	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.467	3.745
25	0.6844	0.8562	1.058	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.45	3.725
26	0.684	0.8557	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.435	3.707
27	0.6837	0.8551	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.421	3.69
28	0.6834	0.8546	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.408	3.674
29	0.683	0.8542	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.396	3.659
30	0.6828	0.8538	1.055	1.31	1.697	2.042	2.457	2.75	3.385	3.646
32	0.6822	0.853	1.054	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.365	3.622
34	0.6818	0.8523	1.052	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.348	3.601
36	0.6814	0.8517	1.052	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	3.333	3.582
38	0.681	0.8512	1.051	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	3.319	3.566
40	0.6807	0.8507	1.05	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.307	3.551
50	0.6794	0.8489	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.261	3.496
60	0.6786	0.8477	1.045	1.296	1.671	2	2.39	2.66	3.232	3.46
100	0.677	0.8452	1.042	1.29	1.66	1.984	2.364	2.626	3.174	3.39
120	0.6765	0.8446	1.041	1.289	1.658	1.98	2.358	2.617	3.16	3.373

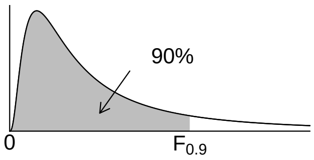
χ^2-dreifing



Taflan gefur χ_a^2. Um χ_a^2 gildir að slembistærð sem fylgir χ^2-dreifingu með k frígráður hefur líkurnar a að taka gildi sem er minna en χ_a^2.

$a =$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.95	0.975	0.99	0.995
k								
1	0.0000393	0.000157	0.000982	0.00393	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.05064	0.1026	5.991	7.378	9.21	10.6
3	0.0717	0.1148	0.2158	0.3518	7.815	9.348	11.34	12.84
4	0.207	0.2971	0.4844	0.7107	9.488	11.14	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.8312	1.145	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.237	1.635	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.69	2.167	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.18	2.733	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.7	3.325	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.247	3.94	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.03	23.34	26.22	28.3
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.075	4.66	5.629	6.571	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.601	5.229	6.262	7.261	25	27.49	30.58	32.8
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.3	28.85	32	34.27
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.265	7.015	8.231	9.39	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.907	10.12	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.434	8.26	9.591	10.85	31.41	34.17	37.57	40
21	8.034	8.897	10.28	11.59	32.67	35.48	38.93	41.4
22	8.643	9.542	10.98	12.34	33.92	36.78	40.29	42.8
23	9.26	10.2	11.69	13.09	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.886	10.86	12.4	13.85	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.2	13.84	15.38	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	43.77	46.98	50.89	53.67
32	15.13	16.36	18.29	20.07	46.19	49.48	53.49	56.33
34	16.5	17.79	19.81	21.66	48.6	51.97	56.06	58.96
36	17.89	19.23	21.34	23.27	51	54.44	58.62	61.58
38	19.29	20.69	22.88	24.88	53.38	56.9	61.16	64.18
40	20.71	22.16	24.43	26.51	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	67.5	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	79.08	83.3	88.38	91.95
100	67.33	70.06	74.22	77.93	124.3	129.6	135.8	140.2
120	83.85	86.92	91.57	95.7	146.6	152.2	159	163.6

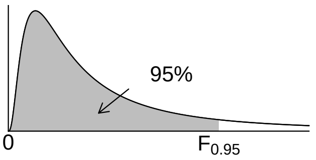
F-dreifing - $a = 0.90$



Taflan gefur $F_{0.90}$. Um $F_{0.90}$ gildir að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með ν_1 og ν_2 frígráður hefur líkurnar 0.90 að taka gildi sem er minna en $F_{0.90}$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	25	∞
1	39.86	49.5	53.59	55.83	57.24	58.2	58.91	59.44	59.86	60.19	60.71	61.74	62.05	63.33
2	8.526	9	9.162	9.243	9.293	9.326	9.349	9.367	9.381	9.392	9.408	9.441	9.451	9.491
3	5.538	5.462	5.391	5.343	5.309	5.285	5.266	5.252	5.24	5.23	5.216	5.184	5.175	5.134
4	4.545	4.325	4.191	4.107	4.051	4.01	3.979	3.955	3.936	3.92	3.896	3.844	3.828	3.761
5	4.06	3.78	3.619	3.52	3.453	3.405	3.368	3.339	3.316	3.297	3.268	3.207	3.187	3.105
6	3.776	3.463	3.289	3.181	3.108	3.055	3.014	2.983	2.958	2.937	2.905	2.836	2.815	2.722
7	3.589	3.257	3.074	2.961	2.883	2.827	2.785	2.752	2.725	2.703	2.668	2.595	2.571	2.471
8	3.458	3.113	2.924	2.806	2.726	2.668	2.624	2.589	2.561	2.538	2.502	2.425	2.4	2.293
9	3.36	3.006	2.813	2.693	2.611	2.551	2.505	2.469	2.44	2.416	2.379	2.298	2.272	2.159
10	3.285	2.924	2.728	2.605	2.522	2.461	2.414	2.377	2.347	2.323	2.284	2.201	2.174	2.055
11	3.225	2.86	2.66	2.536	2.451	2.389	2.342	2.304	2.274	2.248	2.209	2.123	2.095	1.972
12	3.177	2.807	2.606	2.48	2.394	2.331	2.283	2.245	2.214	2.188	2.147	2.06	2.031	1.904
13	3.136	2.763	2.56	2.434	2.347	2.283	2.234	2.195	2.164	2.138	2.097	2.007	1.978	1.846
14	3.102	2.726	2.522	2.395	2.307	2.243	2.193	2.154	2.122	2.095	2.054	1.962	1.933	1.797
15	3.073	2.695	2.49	2.361	2.273	2.208	2.158	2.119	2.086	2.059	2.017	1.924	1.894	1.755
16	3.048	2.668	2.462	2.333	2.244	2.178	2.128	2.088	2.055	2.028	1.985	1.891	1.86	1.718
17	3.026	2.645	2.437	2.308	2.218	2.152	2.102	2.061	2.028	2.001	1.958	1.862	1.831	1.686
18	3.007	2.624	2.416	2.286	2.196	2.13	2.079	2.038	2.005	1.977	1.933	1.837	1.805	1.657
19	2.99	2.606	2.397	2.266	2.176	2.109	2.058	2.017	1.984	1.956	1.912	1.814	1.782	1.631
20	2.975	2.589	2.38	2.249	2.158	2.091	2.04	1.999	1.965	1.937	1.892	1.794	1.761	1.607
21	2.961	2.575	2.365	2.233	2.142	2.075	2.023	1.982	1.948	1.92	1.875	1.776	1.742	1.586
22	2.949	2.561	2.351	2.219	2.128	2.06	2.008	1.967	1.933	1.904	1.859	1.759	1.726	1.567
23	2.937	2.549	2.339	2.207	2.115	2.047	1.995	1.953	1.919	1.89	1.845	1.744	1.71	1.549
24	2.927	2.538	2.327	2.195	2.103	2.035	1.983	1.941	1.906	1.877	1.832	1.73	1.696	1.533
25	2.918	2.528	2.317	2.184	2.092	2.024	1.971	1.929	1.895	1.866	1.82	1.718	1.683	1.518
26	2.909	2.519	2.307	2.174	2.082	2.014	1.961	1.919	1.884	1.855	1.809	1.706	1.671	1.504
27	2.901	2.511	2.299	2.165	2.073	2.005	1.952	1.909	1.874	1.845	1.799	1.695	1.66	1.491
28	2.894	2.503	2.291	2.157	2.064	1.996	1.943	1.9	1.865	1.836	1.79	1.685	1.65	1.478
29	2.887	2.495	2.283	2.149	2.057	1.988	1.935	1.892	1.857	1.827	1.781	1.676	1.64	1.467
30	2.881	2.489	2.276	2.142	2.049	1.98	1.927	1.884	1.849	1.819	1.773	1.667	1.632	1.456
32	2.869	2.477	2.263	2.129	2.036	1.967	1.913	1.87	1.835	1.805	1.758	1.652	1.616	1.437
34	2.859	2.466	2.252	2.118	2.024	1.955	1.901	1.858	1.822	1.793	1.745	1.638	1.601	1.419
36	2.85	2.456	2.243	2.108	2.014	1.945	1.891	1.847	1.811	1.781	1.734	1.626	1.589	1.404
38	2.842	2.448	2.234	2.099	2.005	1.935	1.881	1.838	1.802	1.772	1.724	1.615	1.578	1.39
40	2.835	2.44	2.226	2.091	1.997	1.927	1.873	1.829	1.793	1.763	1.715	1.605	1.568	1.377
60	2.791	2.393	2.177	2.041	1.946	1.875	1.819	1.775	1.738	1.707	1.657	1.543	1.504	1.291
120	2.748	2.347	2.13	1.992	1.896	1.824	1.767	1.722	1.684	1.652	1.601	1.482	1.44	1.193
∞	2.706	2.303	2.084	1.945	1.847	1.774	1.717	1.67	1.632	1.599	1.546	1.421	1.375	1

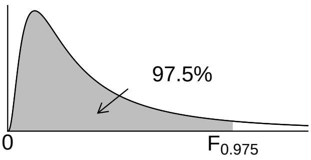
F-dreifing - $a = 0.95$



Taflan gefur $F_{0.95}$. Um $F_{0.95}$ gildir að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með ν_1 og ν_2 frígráður hefur líkurnar 0.95 að taka gildi sem er minna en $F_{0.95}$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	25	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	248	249.3	254.3
2	18.51	19	19.16	19.25	19.3	19.33	19.35	19.37	19.38	19.4	19.41	19.45	19.46	19.5
3	10.13	9.552	9.277	9.117	9.013	8.941	8.887	8.845	8.812	8.786	8.745	8.66	8.634	8.526
4	7.709	6.944	6.591	6.388	6.256	6.163	6.094	6.041	5.999	5.964	5.912	5.803	5.769	5.628
5	6.608	5.786	5.409	5.192	5.05	4.95	4.876	4.818	4.772	4.735	4.678	4.558	4.521	4.365
6	5.987	5.143	4.757	4.534	4.387	4.284	4.207	4.147	4.099	4.06	4	3.874	3.835	3.669
7	5.591	4.737	4.347	4.12	3.972	3.866	3.787	3.726	3.677	3.637	3.575	3.445	3.404	3.23
8	5.318	4.459	4.066	3.838	3.687	3.581	3.5	3.438	3.388	3.347	3.284	3.15	3.108	2.928
9	5.117	4.256	3.863	3.633	3.482	3.374	3.293	3.23	3.179	3.137	3.073	2.936	2.893	2.707
10	4.965	4.103	3.708	3.478	3.326	3.217	3.135	3.072	3.02	2.978	2.913	2.774	2.73	2.538
11	4.844	3.982	3.587	3.357	3.204	3.095	3.012	2.948	2.896	2.854	2.788	2.646	2.601	2.404
12	4.747	3.885	3.49	3.259	3.106	2.996	2.913	2.849	2.796	2.753	2.687	2.544	2.498	2.296
13	4.667	3.806	3.411	3.179	3.025	2.915	2.832	2.767	2.714	2.671	2.604	2.459	2.412	2.206
14	4.6	3.739	3.344	3.112	2.958	2.848	2.764	2.699	2.646	2.602	2.534	2.388	2.341	2.131
15	4.543	3.682	3.287	3.056	2.901	2.79	2.707	2.641	2.588	2.544	2.475	2.328	2.28	2.066
16	4.494	3.634	3.239	3.007	2.852	2.741	2.657	2.591	2.538	2.494	2.425	2.276	2.227	2.01
17	4.451	3.592	3.197	2.965	2.81	2.699	2.614	2.548	2.494	2.45	2.381	2.23	2.181	1.96
18	4.414	3.555	3.16	2.928	2.773	2.661	2.577	2.51	2.456	2.412	2.342	2.191	2.141	1.917
19	4.381	3.522	3.127	2.895	2.74	2.628	2.544	2.477	2.423	2.378	2.308	2.155	2.106	1.878
20	4.351	3.493	3.098	2.866	2.711	2.599	2.514	2.447	2.393	2.348	2.278	2.124	2.074	1.843
21	4.325	3.467	3.072	2.84	2.685	2.573	2.488	2.42	2.366	2.321	2.25	2.096	2.045	1.812
22	4.301	3.443	3.049	2.817	2.661	2.549	2.464	2.397	2.342	2.297	2.226	2.071	2.02	1.783
23	4.279	3.422	3.028	2.796	2.64	2.528	2.442	2.375	2.32	2.275	2.204	2.048	1.996	1.757
24	4.26	3.403	3.009	2.776	2.621	2.508	2.423	2.355	2.3	2.255	2.183	2.027	1.975	1.733
25	4.242	3.385	2.991	2.759	2.603	2.49	2.405	2.337	2.282	2.236	2.165	2.007	1.955	1.711
26	4.225	3.369	2.975	2.743	2.587	2.474	2.388	2.321	2.265	2.22	2.148	1.99	1.938	1.691
27	4.21	3.354	2.96	2.728	2.572	2.459	2.373	2.305	2.25	2.204	2.132	1.974	1.921	1.672
28	4.196	3.34	2.947	2.714	2.558	2.445	2.359	2.291	2.236	2.19	2.118	1.959	1.906	1.654
29	4.183	3.328	2.934	2.701	2.545	2.432	2.346	2.278	2.223	2.177	2.104	1.945	1.891	1.638
30	4.171	3.316	2.922	2.69	2.534	2.421	2.334	2.266	2.211	2.165	2.092	1.932	1.878	1.622
32	4.149	3.295	2.901	2.668	2.512	2.399	2.313	2.244	2.189	2.142	2.07	1.908	1.854	1.594
34	4.13	3.276	2.883	2.65	2.494	2.38	2.294	2.225	2.17	2.123	2.05	1.888	1.833	1.569
36	4.113	3.259	2.866	2.634	2.477	2.364	2.277	2.209	2.153	2.106	2.033	1.87	1.815	1.547
38	4.098	3.245	2.852	2.619	2.463	2.349	2.262	2.194	2.138	2.091	2.017	1.853	1.798	1.527
40	4.085	3.232	2.839	2.606	2.449	2.336	2.249	2.18	2.124	2.077	2.003	1.839	1.783	1.509
60	4.001	3.15	2.758	2.525	2.368	2.254	2.167	2.097	2.04	1.993	1.917	1.748	1.69	1.389
120	3.92	3.072	2.68	2.447	2.29	2.175	2.087	2.016	1.959	1.91	1.834	1.659	1.598	1.254
∞	3.841	2.996	2.605	2.372	2.214	2.099	2.01	1.938	1.88	1.831	1.752	1.571	1.506	1

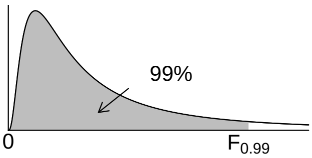
F-dreifing - $a = 0.975$



Taflan gefur $F_{0.975}$. Um $F_{0.975}$ gildir að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með ν_1 og ν_2 frígráður hefur líkurnar 0.975 að taka gildi sem er minna en $F_{0.975}$.

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	25	∞
1	647.8	799.5	864.2	899.6	921.8	937.1	948.2	956.7	963.3	968.6	976.7	993.1	998.1	1018
2	38.51	39	39.17	39.25	39.3	39.33	39.36	39.37	39.39	39.4	39.41	39.45	39.46	39.5
3	17.44	16.04	15.44	15.1	14.88	14.73	14.62	14.54	14.47	14.42	14.34	14.17	14.12	13.9
4	12.22	10.65	9.979	9.605	9.364	9.197	9.074	8.98	8.905	8.844	8.751	8.56	8.501	8.257
5	10.01	8.434	7.764	7.388	7.146	6.978	6.853	6.757	6.681	6.619	6.525	6.329	6.268	6.015
6	8.813	7.26	6.599	6.227	5.988	5.82	5.695	5.6	5.523	5.461	5.366	5.168	5.107	4.849
7	8.073	6.542	5.89	5.523	5.285	5.119	4.995	4.899	4.823	4.761	4.666	4.467	4.405	4.142
8	7.571	6.059	5.416	5.053	4.817	4.652	4.529	4.433	4.357	4.295	4.2	3.999	3.937	3.67
9	7.209	5.715	5.078	4.718	4.484	4.32	4.197	4.102	4.026	3.964	3.868	3.667	3.604	3.333
10	6.937	5.456	4.826	4.468	4.236	4.072	3.95	3.855	3.779	3.717	3.621	3.419	3.355	3.08
11	6.724	5.256	4.63	4.275	4.044	3.881	3.759	3.664	3.588	3.526	3.43	3.226	3.162	2.883
12	6.554	5.096	4.474	4.121	3.891	3.728	3.607	3.512	3.436	3.374	3.277	3.073	3.008	2.725
13	6.414	4.965	4.347	3.996	3.767	3.604	3.483	3.388	3.312	3.25	3.153	2.948	2.882	2.595
14	6.298	4.857	4.242	3.892	3.663	3.501	3.38	3.285	3.209	3.147	3.05	2.844	2.778	2.487
15	6.2	4.765	4.153	3.804	3.576	3.415	3.293	3.199	3.123	3.06	2.963	2.756	2.689	2.395
16	6.115	4.687	4.077	3.729	3.502	3.341	3.219	3.125	3.049	2.986	2.889	2.681	2.614	2.316
17	6.042	4.619	4.011	3.665	3.438	3.277	3.156	3.061	2.985	2.922	2.825	2.616	2.548	2.247
18	5.978	4.56	3.954	3.608	3.382	3.221	3.1	3.005	2.929	2.866	2.769	2.559	2.491	2.187
19	5.922	4.508	3.903	3.559	3.333	3.172	3.051	2.956	2.88	2.817	2.72	2.509	2.441	2.133
20	5.871	4.461	3.859	3.515	3.289	3.128	3.007	2.913	2.837	2.774	2.676	2.464	2.396	2.085
21	5.827	4.42	3.819	3.475	3.25	3.09	2.969	2.874	2.798	2.735	2.637	2.425	2.356	2.042
22	5.786	4.383	3.783	3.44	3.215	3.055	2.934	2.839	2.763	2.7	2.602	2.389	2.32	2.003
23	5.75	4.349	3.75	3.408	3.183	3.023	2.902	2.808	2.731	2.668	2.57	2.357	2.287	1.968
24	5.717	4.319	3.721	3.379	3.155	2.995	2.874	2.779	2.703	2.64	2.541	2.327	2.257	1.935
25	5.686	4.291	3.694	3.353	3.129	2.969	2.848	2.753	2.677	2.613	2.515	2.3	2.23	1.906
26	5.659	4.265	3.67	3.329	3.105	2.945	2.824	2.729	2.653	2.59	2.491	2.276	2.205	1.878
27	5.633	4.242	3.647	3.307	3.083	2.923	2.802	2.707	2.631	2.568	2.469	2.253	2.183	1.853
28	5.61	4.221	3.626	3.286	3.063	2.903	2.782	2.687	2.611	2.547	2.448	2.232	2.161	1.829
29	5.588	4.201	3.607	3.267	3.044	2.884	2.763	2.669	2.592	2.529	2.43	2.213	2.142	1.807
30	5.568	4.182	3.589	3.25	3.026	2.867	2.746	2.651	2.575	2.511	2.412	2.195	2.124	1.787
32	5.531	4.149	3.557	3.218	2.995	2.836	2.715	2.62	2.543	2.48	2.381	2.163	2.091	1.75
34	5.499	4.12	3.529	3.191	2.968	2.808	2.688	2.593	2.516	2.453	2.353	2.135	2.062	1.717
36	5.471	4.094	3.505	3.167	2.944	2.785	2.664	2.569	2.492	2.429	2.329	2.11	2.037	1.687
38	5.446	4.071	3.483	3.145	2.923	2.763	2.643	2.548	2.471	2.407	2.307	2.088	2.015	1.661
40	5.424	4.051	3.463	3.126	2.904	2.744	2.624	2.529	2.452	2.388	2.288	2.068	1.994	1.637
60	5.286	3.925	3.343	3.008	2.786	2.627	2.507	2.412	2.334	2.27	2.169	1.944	1.869	1.482
120	5.152	3.805	3.227	2.894	2.674	2.515	2.395	2.299	2.222	2.157	2.055	1.825	1.746	1.31
∞	5.024	3.689	3.116	2.786	2.567	2.408	2.288	2.192	2.114	2.048	1.945	1.708	1.626	1

F-dreifing - $a = 0.99$



Taflan gefur $F_{0.99}$. Um $F_{0.99}$ gildir að slembistærð sem fylgir F-dreifingu með v_1 og v_2 frígráður hefur líkurnar 0.99 að taka gildi sem er minna en $F_{0.99}$.

v_2 \ v_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	20	25	∞
1	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6106	6209	6240	6366
2	98.5	99	99.17	99.25	99.3	99.33	99.36	99.37	99.39	99.4	99.42	99.45	99.46	99.5
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.69	26.58	26.13
4	21.2	18	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.8	14.66	14.55	14.37	14.02	13.91	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.888	9.553	9.449	9.02
6	13.75	10.92	9.78	9.148	8.746	8.466	8.26	8.102	7.976	7.874	7.718	7.396	7.296	6.88
7	12.25	9.547	8.451	7.847	7.46	7.191	6.993	6.84	6.719	6.62	6.469	6.155	6.058	5.65
8	11.26	8.649	7.591	7.006	6.632	6.371	6.178	6.029	5.911	5.814	5.667	5.359	5.263	4.859
9	10.56	8.022	6.992	6.422	6.057	5.802	5.613	5.467	5.351	5.257	5.111	4.808	4.713	4.311
10	10.04	7.559	6.552	5.994	5.636	5.386	5.2	5.057	4.942	4.849	4.706	4.405	4.311	3.909
11	9.646	7.206	6.217	5.668	5.316	5.069	4.886	4.744	4.632	4.539	4.397	4.099	4.005	3.602
12	9.33	6.927	5.953	5.412	5.064	4.821	4.64	4.499	4.388	4.296	4.155	3.858	3.765	3.361
13	9.074	6.701	5.739	5.205	4.862	4.62	4.441	4.302	4.191	4.1	3.96	3.665	3.571	3.165
14	8.862	6.515	5.564	5.035	4.695	4.456	4.278	4.14	4.03	3.939	3.8	3.505	3.412	3.004
15	8.683	6.359	5.417	4.893	4.556	4.318	4.142	4.004	3.895	3.805	3.666	3.372	3.278	2.868
16	8.531	6.226	5.292	4.773	4.437	4.202	4.026	3.89	3.78	3.691	3.553	3.259	3.165	2.753
17	8.4	6.112	5.185	4.669	4.336	4.102	3.927	3.791	3.682	3.593	3.455	3.162	3.068	2.653
18	8.285	6.013	5.092	4.579	4.248	4.015	3.841	3.705	3.597	3.508	3.371	3.077	2.983	2.566
19	8.185	5.926	5.01	4.5	4.171	3.939	3.765	3.631	3.523	3.434	3.297	3.003	2.909	2.489
20	8.096	5.849	4.938	4.431	4.103	3.871	3.699	3.564	3.457	3.368	3.231	2.938	2.843	2.421
21	8.017	5.78	4.874	4.369	4.042	3.812	3.64	3.506	3.398	3.31	3.173	2.88	2.785	2.36
22	7.945	5.719	4.817	4.313	3.988	3.758	3.587	3.453	3.346	3.258	3.121	2.827	2.733	2.305
23	7.881	5.664	4.765	4.264	3.939	3.71	3.539	3.406	3.299	3.211	3.074	2.781	2.686	2.256
24	7.823	5.614	4.718	4.218	3.895	3.667	3.496	3.363	3.256	3.168	3.032	2.738	2.643	2.211
25	7.77	5.568	4.675	4.177	3.855	3.627	3.457	3.324	3.217	3.129	2.993	2.699	2.604	2.169
26	7.721	5.526	4.637	4.14	3.818	3.591	3.421	3.288	3.182	3.094	2.958	2.664	2.569	2.131
27	7.677	5.488	4.601	4.106	3.785	3.558	3.388	3.256	3.149	3.062	2.926	2.632	2.536	2.097
28	7.636	5.453	4.568	4.074	3.754	3.528	3.358	3.226	3.12	3.032	2.896	2.602	2.506	2.064
29	7.598	5.42	4.538	4.045	3.725	3.499	3.33	3.198	3.092	3.005	2.868	2.574	2.478	2.034
30	7.562	5.39	4.51	4.018	3.699	3.473	3.304	3.173	3.067	2.979	2.843	2.549	2.453	2.006
32	7.499	5.336	4.459	3.969	3.652	3.427	3.258	3.127	3.021	2.934	2.798	2.503	2.406	1.956
34	7.444	5.289	4.416	3.927	3.611	3.386	3.218	3.087	2.981	2.894	2.758	2.463	2.366	1.911
36	7.396	5.248	4.377	3.89	3.574	3.351	3.183	3.052	2.946	2.859	2.723	2.428	2.331	1.872
38	7.353	5.211	4.343	3.858	3.542	3.319	3.152	3.021	2.915	2.828	2.692	2.397	2.299	1.837
40	7.314	5.179	4.313	3.828	3.514	3.291	3.124	2.993	2.888	2.801	2.665	2.369	2.271	1.805
60	7.077	4.977	4.126	3.649	3.339	3.119	2.953	2.823	2.718	2.632	2.496	2.198	2.098	1.601
120	6.851	4.787	3.949	3.48	3.174	2.956	2.792	2.663	2.559	2.472	2.336	2.035	1.932	1.381
∞	6.635	4.605	3.782	3.319	3.017	2.802	2.639	2.511	2.407	2.321	2.185	1.878	1.773	1

Íslensk-enskur orðalisti

aðgengisúrtök convenience sampling
aðhvarfsgreining regression
bernoulli tilraun bernoulli trial
bjagi bias
blindun blinding
breyta variable
breytileiki spread
bryggjun extrapolation
brúun interpolating
dreififall distribution function
einblind rannsókn single-blind trial
einfalt línulegt aðhvarf simple linear regression
einfalt slembiúrtak simple random sample
einhliða tilgátupróf one-sided test
einsdreifðar identically distributed
endurtekning repetition
endurvalsaðferðir resampling methods
f-próf f-test
fervikagreining analysis og variance, anova
fervikasummur sums of squares
fishers próf fishers test
fjórðungamörk quartiles
fjórðungaspönn interquartile range
flokkabreyta categorical variable
flokkar categories
frávikshlutfall coefficient of variation
frígráður degrees of freedom
fölsk jákvæð false positive
fölsk neikvæð false negative
gagnlíkindahlutfall odds ratio
gagnlíkindahlutfall odds ratio
gagnlíkindi odds
gagntilgáta alternative hypothesis
hafna reject
hlutfall proportion
höfnunarsvæði rejection area
höfuðsetning tölfræðinnar central limit theorem
kassarit boxplot
kí kvaðrat próf chi-squared test
kökurit pie chart

lagskipt slembiúrtak stratified random sample
leifar residuals
lyfleysa placebo
lyfleysuáhrif placebo effect
líkindadreifing probability distribution
línuleg umbreyting linear transformation
línulegt linear
lögmál mikils fjölda law of large numbers
lögun dreifinga shape of distributions
lýsandi tölfræði descriptive statistics
lýsistærð statistic
massafall mass function
metill estimator
meðaltal mean, arithmetic mean
miðgildi median
miðja mælinga central tendency
miðja spannar mid range
miðja center
mátgæðapróf goodness of fit test
normaldreifingarrit normal probability plot
normaldreifing normal distribution
næmi sensitivity
núlltilgáta null hypothesis
orsakasamband causation
p-gildi p-value
parað slembiúrtak paired random sample
parað t-próf paired t-test
poisson dreifing poisson distribution
prófstærð test statistic
prósentumark percentile
punktarit scatter plot
rannsakandabjagi experimenters bias
röðuð flokkabreyta ordinal categorical variable
samfelld breyta continuous variable
sjálfboðaliðaúrtök voluntary response sampling
skýribreyta explanatory variable
slembival randomization
slembiúrtak random sample
slembni randomness
spönn, dreifisvið range
staðalfrávik standard deviation
staðalskekkja standard error
stikalaus próf nonparametric tests
stiki parameter
strjál breyta discrete variable
stuðlarit histogram

styrkur power
stöplarit bar chart
stýrð tilraun controlled experiment
svarbreyta response variable
sértæki specificity
sönn jákvæð true positive
sönn neikvæð true negative
t-próf t-test
talnabreyta numerical variables
tengifall link function
tengslatöflur contingency tables
tilgáta hypothesis
tilgátupróf hypothesis test
tilraun experiment
tvíblind rannsókn double-blind trial
tvíhliða tilgátupróf two-sided test
tvíkosta aðhvarfsgreining logistic regression
tvíkostadreifing binomial distribution
tvíliðustuðullinn binomial coefficient
tíðasta gildi mode
umbreyta transform
vegin dreifni pooled variance
vegið meðaltal weighted mean
villa af gerð i, villulíkur type i error
villa af gerð ii type ii error
væntigildi expected value
vísir index
vöntun mælinga missing values
óháðar og einsdreifðar iid - independent and identically distributed
öryggisbil confidence interval
öryggismörk confidence limits
öryggi confidence level
úrtaksdreifing lýsistærðar sampling distribution
úrtakshögun sampling
áhættuhlutfall relative risk
ályktunartölfræði inferential statistics
óröðuð flokkabreyta categorical variable
úrtaksbjagi sampling bias
úrtak sample
útlagar outliers
útlagi outlier
þéttifall density function
þéttiferill density curve
þýði population

Ensk-íslenskur orðalisti

alternative hypothesis gagntilgáta
analysis og variance, anova fervikagreining
bar chart stöplarit
bernoulli trial bernoulli tilraun
bias bjagi
binomial coefficient tvíliðustuðullinn
binomial distribution tvíkostadreifing
blinding blindun
boxplot kassarit
categorical variable flokkabreyta
categorical variable óröðuð flokkabreyta
categories flokkar
causation orsakasamband
center miðja
central limit theorem höfuðsetning tölfræðinnar
central tendency miðja mælinga
chi-squared test kí kvaðrat próf
coefficient of variation frávikshlutfall
confidence interval öryggisbil
confidence level öryggi
confidence limits öryggismörk
contingency tables tengslatöflur
continuous variable samfelld breyta
controlled experiment stýrð tilraun
convenience sampling aðgengisúrtök
degrees of freedom frígráður
density curve þéttiferill
density function þéttifall
descriptive statistics lýsandi tölfræði
discrete variable strjál breyta
distribution function dreififall
double-blind trial tvíblind rannsókn
estimator metill
expected value væntigildi
experimenters bias rannsakandabjagi
experiment tilraun
explanatory variable skýribreyta
extrapolation bryggjun
f-test f-próf
false negative fölsk neikvæð

false positive fölsk jákvæð
fishers test fishers próf
goodness of fit test mátgæðapróf
histogram stuðlarit
hypothesis test tilgátupróf
hypothesis tilgáta
identically distributed einsdreifðar
iid - independent and identically distributed óháðar og einsdreifðar
index vísir
inferential statistics ályktunartölfræði
interpolating brúun
interquartile range fjórðungaspönn
law of large numbers lögmál mikils fjölda
linear transformation línuleg umbreyting
linear línulegt
link function tengifall
logistic regression tvíkosta aðhvarfsgreining
mass function massafall
mean, arithmetic mean meðaltal
median miðgildi
mid range miðja spannar
missing values vöntun mælinga
mode tíðasta gildi
nonparametric tests stikalaus próf
normal distribution normaldreifing
normal probability plot normaldreifingarrit
null hypothesis núlltilgáta
numerical variables talnabreyta
odds ratio gagnlíkindahlutfall
odds ratio gagnlíkindahlutfall
odds gagnlíkindi
one-sided test einhliða tilgátupróf
ordinal categorical variable röðuð flokkabreyta
outliers útlagar
outlier útlagi
p-value p-gildi
paired random sample parað slembiúrtak
paired t-test parað t-próf
parameter stiki
percentile prósentumark
pie chart kökurit
placebo effect lyfleysuáhrif
placebo lyfleysa
poisson distribution poisson dreifing
pooled variance vegin dreifni
population þýði

power styrkur
probability distribution líkindadreifing
proportion hlutfall
quartiles fjórðungamörk
random sample slembiúrtak
randomization slembival
randomness slembni
range spönn, dreifisvið
regression aðhvarfsgreining
rejection area höfnunarsvæði
reject hafna
relative risk áhættuhlutfall
repetition endurtekning
resampling methods endurvalsaðferðir
residuals leifar
response variable svarbreyta
sample úrtak
sampling bias úrtaksbjagi
sampling distribution úrtaksdreifing lýsistærðar
sampling úrtakshögun
scatter plot punktarit
sensitivity næmi
shape of distributions lögun dreifinga
simple linear regression einfalt línulegt aðhvarf
simple random sample einfalt slembiúrtak
single-blind trial einblind rannsókn
specificity sértæki
spread breytileiki
standard deviation staðalfrávik
standard error staðalskekkja
statistic lýsistærð
stratified random sample lagskipt slembiúrtak
sums of squares fervikasummur
t-test t-próf
test statistic prófstærð
transform umbreyta
true negative sönn neikvæð
true positive sönn jákvæð
two-sided test tvíhliða tilgátupróf
type i error villa af gerð i, villulíkur
type ii error villa af gerð ii
variable breyta
voluntary response sampling sjálfboðaliðaúrtök
weighted mean vegið meðaltal

Atriðisorðaskrá

öryggi, 139
öryggisbil, 139
öryggismörk, 140
áhættuhlutfall, 69
óháðar, 86
úrtak, 12
úrtaksbjagi, 17, 128
úrtaksdreifing lýsistærðar, 127
úrtakshögun, 17
útlagar, 38, 41, 53, 56, 229
þéttifall, 106
þéttiferill, 106
þýði, 11

aðgengisúrtök, 21
aðhvarfsgreining, 221

bernoulli tilraun, 92, 95, 105, 158
bjagi, 16, 20, 22, 128
blindun, 11, 21, 25
brúun, 226
breyta, 13, 82, 221
breytileiki, 31, 57, 65
bryggjun, 227

dreififall, 106, 107
dreifni, 62, 65, 89, 129, 177
dulin breyta, 68

einblind rannsókn, 24
einfalt línulegt aðhvarf, 221
einfalt slembiúrtak, 18
einhliða tilgátupróf, 142
einsdreifðar, 86, 131, 134, 158, 230
endurtekning, 16
endurvalsaðferð, 171
endurvalsaðferðir, 158, 161

fölsk jákvæð, 73
fölsk neikvæð, 73
fervikagreining, 211
fervikasummur, 213
fimm tölu samantekt, 60
Fishers próf, 161, 171
fjórðungamörk, 58, 60, 61
fjórðungaspönn, 42, 61
flokkabreyta, 13, 157, 171
flokkar, 13
frígráður, 116, 117, 119
frávikshlutfall, 64

gagnlíkindi, 71
gagnlikindahlutfall, 70
gagntilgáta, 142

höfnunarsvæði, 144
höfuðsetning tölfræðinnar, 134
hlutfall, 138, 157

kökurit, 33
kassarit, 35, 40

lögmál mikils fjölda, 88
lögun dreifinga, 38
líkindadreifing, 83
línulegt, 66
lýsandi tölfræði, 49
lýsistærð, 49, 127
lagskipt slembiúrtak, 18
leifar, 223, 225, 229
lyfleysa, 22
lyfleysuáhrif, 23

mátgæðapróf, 170
massafall, 90, 93, 100
meðaltal, 54, 56, 87, 107, 118, 128, 136, 177, 189
metill, 134, 136
miðgildi, 53, 56, 59
miðja, 51
miðja spannar, 51

núlltilgáta, 141
næmi, 72

normaldreifing, 107, 132, 134, 136, 158, 180, 211, 230
normaldreifingarrit, 115
normalnálgun, 158, 161

orsakasamband, 24, 68

p-gildi, 146, 151
parað slembiúrtak, 19
parað t-próf, 199
paraðar mælingar, 199
Poisson dreifing, 100, 136
prófstærð, 134, 143
prósentumörk, 61
punktarit, 35, 43

röðuð flokkabreyta, 13
rannsakandabjagi, 22

sönn jákvæð, 73
sönn neikvæð, 73
sértæki, 72
sameina flokka, 171
samfelld breyta, 14
sjálboðaliðaúrtök, 20
skýribreyta, 15, 221
slembiúrtak, 18, 128
slembistærð, 105, 135, 230
slembival, 18
slembni, 16
spönn, 58
stöplarit, 31
stýrð tilraun, 25
staðalfrávik, 63, 65, 131
staðalskekkja, 131
stiki, 85, 136
strjál breyta, 14
stuðlarit, 35
styrkur, 149
svarbreyta, 15, 221

t-dreifing, 187
t-próf, 187
tíðasta gildi, 52
talnabreyta, 14
tengifall, 243
tengslatöflur, 170
tilgáta, 141
tilgátupróf, 140
tvíblind rannsókn, 24
tvíhliða tilgátupróf, 142
tvíkosta aðhvarfsgreining, 243
tvíkostadreifingin, 93, 158
tvíliðustuðullinn, 93

vöntun mælinga, 21
vísir, 50
væntigildi, 88, 99, 104, 129
varpa, 111, 114
vegið meðaltal, 55
villa af gerð I, 149
villulíkur, 149

z-gildi, 110