Ályktunartölfræði

Kennarar diffra 2024

Anna Helga Jónsdóttir

Helstu atriði:

1. Slembistærðir
2. Úrtaksdreifing lýsistærðar
3. Lýsistærðin meðaltal
4. Höfuðsetning tölfræðinnar
5. Öryggisbil
6. Tilgátupróf

Hvert erum við komin...

Slembistærð

Slembistærð

Slembistærð (random variable) lýsir útkomu breytu áður en hún er mæld.

Ritháttur slembistærða

Við táknum slembistærð með **stórum** staf, oft X.

Við táknum gildi sem slembistærð **hefur tekið** með **litlum** staf, oft x.

Ávallt er notaður sami bókstafur fyrir slembistærðina og gildið sem hún tekur.

Strjálar og samfelldar slembistærðir

Strjálar slembistærðir

Strjálar slembistærðir (discrete random variables) lýsa strjálum breytum. Þær geta eingöngu tekið endanlega mörg gildi á sérhverju takmörkuðu bili.

Samfelldar slembistærðir

Samfelldar slembistærðir (continuous random variables) lýsa samfelldum breytum. Þær geta tekið hvaða gildi sem er á einhverju bili.

Líkindadreifingar slembistærða eru strjálar ef slembistærðirnar eru strjálar en annars samfelldar.

Hvert erum við komin...

Lýsistærðir

Lýsistærð

Lýsistærð er tala sem er reiknuð með einhverjum ákveðnum hætti út frá mælingunum okkar.

- Við lítum á mælingarnar okkar sem útkomur slembistærða.
- Lýsistærðir eru reiknaðar út frá útkomunum okkar.
- Ef að útkomurnar breytast geta lýsistærðirnar líka breyst.
- Það þýðir að lýsistærðir eru í raun slembistærðir!

Úrtaksdreifing lýsistærðar

Úrtaksdreifing lýsistærðar

Líkindadreifingu lýsistærðar köllum við **úrtaksdreifingu lýsistærðarinnar** (sampling distribution).

Úrtaksdreifing lýsistærðar veltur á:

- **líkindadreifingu mælinganna** sem lýsistærðin byggir á
- **fjölda mælinga** sem hún er reiknuð út frá

Þegar viss skilyrði eru uppfyllt fylgja úrtaksdreifingar sumra lýsistærða þekktum líkindadreifingum. Ályktunartölfræði byggir yfirleitt á því. Ef úrtaksreifingarnar fylgja ekki þekktum líkindadreifingum má notast við endurvalsaðferðir.

Hvert erum við komin...

Væntigildi og dreifni meðatals

Væntigildi og dreifni meðaltals

Látum $X_1, \ldots, X_n$ lýsa n óháðum mælingum af sömu breytunni og hverja mælingu hafa væntigildi μ og dreifni σ^2. Þá gildir um meðaltal mælinganna, $\bar{X}$ að:

$$E[\bar{X}] = \mu$$

$$Var[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n}$$

Staðalskekkja

Látum $X_1, \ldots, X_n$ vera eins og áðan. Þá er **staðalskekkja** mælinganna stærðin

$$\sigma/\sqrt{n}$$

Hún er staðalfrávik meðaltals mælinganna.

Líkindadreifing meðaltals normaldreifðra slembistærða

Líkindadreifing meðaltals normaldreifðra slembistærða

Látum $X_1, \ldots, X_n$ lýsa n mælingum af normaldreifðri breytu og hverja mælingu hafa væntigildi μ og dreifni σ^2.

Þá fylgir meðaltal mælinganna, $\bar{X}$, einnig normaldreifingu, með væntigildi μ og dreifni σ^2/n.

$$\text{Þ.e.a.s: Ef } \; X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \; \text{ þá } \; \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n).$$

Hvert erum við komin...

Höfuðsetning tölfræðinnar

Höfuðsetning tölfræðinnar

Ef $X_1, \ldots, X_n$ eru óháðar og einsdreifðar slembistærðir þá fylgir $\bar{X}$ normaldreifingu með væntigildi μ og dreifni σ^2/n

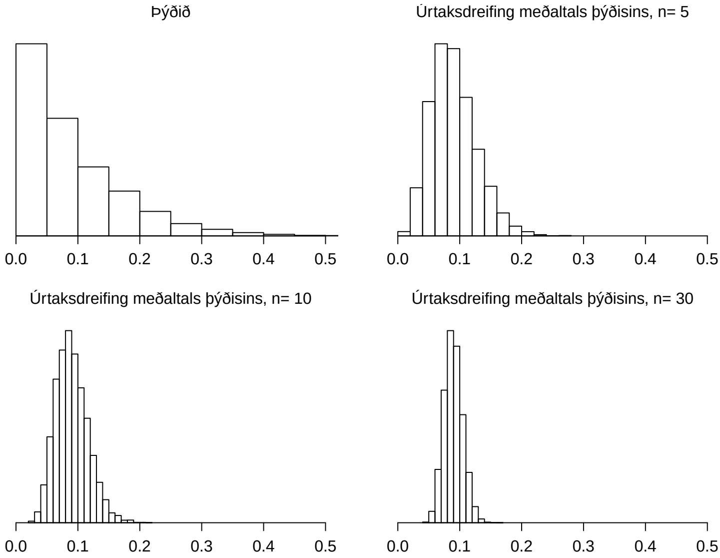
$$\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$$

ef n er nógu stórt.

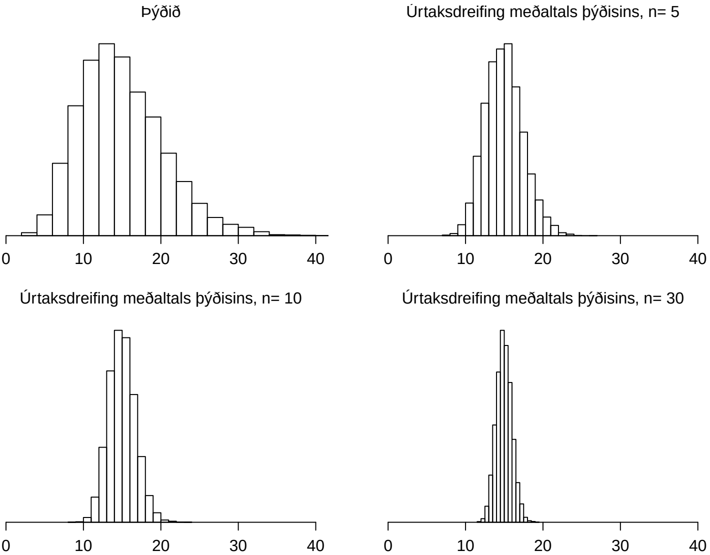
Athugið að við þurfum ekki að þekkja líkindadreifingu þýðisins!

Oft er miðið við að $n \geq 30$ sé nógu stórt (það er þó ekki algilt!)

Mjög skekkt dreifing



Lítið skekkt dreifing



Hvert erum við komin...

Ákvarðanataka í ljósi breytileika

- Eins og þið sáuð var breytilegt frá úrtaki til úrtaks hvaða meðaltal við reiknuðum.
- Sennilegast fengum við **aldrei** (af öllum þúsund skiptunum) nákvæmlega rétta meðaltalið á breytunni.
- Þess í stað gefum við upp bil sem inniheldur **sennileg** gildi á meðaltalinu.
- Það er öryggisbil!
- Öryggisbil má reikna fyrir hvaða lýsistærð sem er, ekki bara meðaltöl.
- Undir ákveðnum krnigumstæðum má reikna út öryggsbil sem byggja á þekktum líkindadreifingum annars má nota endurvalsaðferðir.

Öryggi og öryggisbil

Öryggisbil (confidence interval)

1 - α **öryggisbil** er talnabil sem inniheldur sanna gildi tiltekins stika með örygginu 1 - α.

Öryggi (confidence level)

Öryggi er það hlutfall tilvika þar sem öryggisbilið inniheldur raunverulegt gildi tiltekins stika, þegar tilraunin er endurtekin mjög oft.

Öryggismörk

Öryggismörk eða vikmörk

Öryggismörk (confidence limits) eru endapunktar öryggisbilsins.

- Efra öryggismarkið er stærsta gildið sem er tekið á bilinu.
- Neðra öryggismarkið er minnsta gildið sem er tekið á bilinu.

Villulíkur

Villulíkur (type I error), táknaðar α, eru það hlutfall tilvika, þar sem öryggisbilið inniheldur ekki raunverulega gildið á stikanum, ef tilraunin er endurtekin mjög oft.

Verkefni í tíma

- Kennari fær nemendur til að skrá hæð sína á miða og setja í krukku/hatt/annað ílát.
- Krukkan er látin ganga meðal nemenda og þeir beðnir um að velja 5 miða af handahófi og skrá mælingarnar hjá sér.
- Kennari reiknar meðaltal allra mælinganna og staðalfrávik en segir nemendunum bara hvert staðalfrávikð er (ekki meðaltalið).
- Kennari gefur upp að 68% öryggisbil fyrir meðaltal þýðis (μ) sem fylgir normaldreifingu þar sem staðalfrávik þýðisins er þekkt (σ) er:

$$\bar{x} - \sigma/\sqrt{n} < \mu < \bar{x} + \sigma/\sqrt{n}$$

- Nemendur eru beðnir um að nota gögnin sín til að reikna efra og neðra mark og teikna öryggisbilið á töfluna.
- Kennari teiknar sanna meðaltalið μ á töfluna.
- U.þ.b 68% öryggisbilanna eiga að innihalda μ.

Hvert erum við komin...

Tilgátupróf

- Oft viljum við geta fullyrt um einhverja eiginlega sem breyturnar okkar hafa.
- Slíkar fullyrðingar eru oftar en ekki jafngildar því að lýsistærðir sem eru reiknaðar út frá breytunum hafi einhverja tiltekna eiginleika.
- Fullyrðingarnar eru svo prófaðar með tilgátuprófum.

Hugmyndafræði tilgátuprófa

Hugmyndafræði tilgátuprófa

Sett er fram ein tilgáta sem lýsir því sem við viljum sýna fram á og önnur sem lýsir hlutlausu tilviki.

Fundin er lýsistærð sem hefur þekkta líkindadreifingu í hlutlausa tilvikinu. Þessi lýsistærð er prófstærðin okkar.

Skilgreint er hvaða gildi á prófstærðinni eru „ósennileg“ miðað við líkindadreifinguna í hlutlausa tilvikinu.

Ef útkoma prófstærðarinnar flokkast sem „ósennileg“ þá höfnum við tilgátunni um hlutlausa ástandið og fullyrðum tilgátuna sem við viljum sýna fram á.

Ef útkoman er ekki „ósennileg“ er ekkert fullyrt.

Tilgátur

Núlltilgáta

- **Núlltilgáta** er fullyrðing sem getur verið afsönnuð með fyrirliggjandi gögnum.
- Hún verður hins vegar aldrei sönnuð.
- Hún er yfirleitt táknuð með H_0.

Gagntilgáta

- **Gagntilgáta** er sú fullyrðing sem við viljum staðfesta með rannsókninni.
- Hún er eingöngu sönnuð en ekki afsönnuð.
- Hún er ýmist táknuð með H_1 eða H_a.

Áttanir tilgátuprófa

Einhliða próf

Til eru tvær gerðir *einhliða tilgátuprófa*:

- Þau sem fullyrða að einn stiki gagnanna sé **stærri** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.
- Þau sem fullyrða að einn stiki gagnanna sé **minni** en annar stiki eða eitthvað ákveðið gildi, ef gögnin leyfa.

Tvíhliða próf

Ef gögnin leyfa þá fullyrðir *tvíhliða tilgátupróf* að einn stiki gagnanna sé **annað hvort stærri eða minni** en eitthvað gildi, ef gögnin leyfa.

Prófstærðir

Prófstærð

Prófstærð (test statistic) er lýsistærð sem má nota til að hrekja núlltilgátu, ef gögnin leyfa.

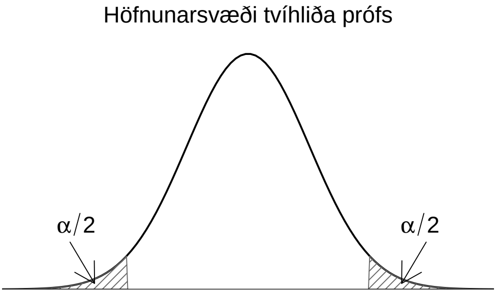
Höfnun núlltilgátu

Við **höfnum** núlltilgátu ef prófstærðin okkar hefur ósennilegt gildi miðað við þá líkindadreifingu sem hún ætti að hafa ef núlltilgátan væri sönn.

α-stig

α **stig** tilgátuprófs eru mestu ásættanlegu líkur þess að hafna núlltilgátunni þegar hún er í raun sönn. α **stig** er orft kallað marktektarkrafa (e. level og significance).

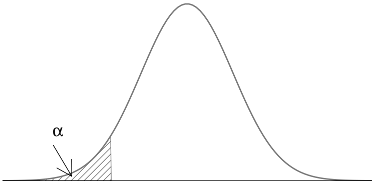
Höfnunarsvæði tvíhliða prófs



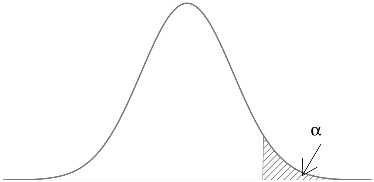
Mynd: Höfnunarsvæði tvíhliða prófs

Höfnunarsvæði einhliða prófs

Höfnunarsvæði einhliða < prófs



Höfnunarsvæði einhliða > prófs



p-gildi og styrkur

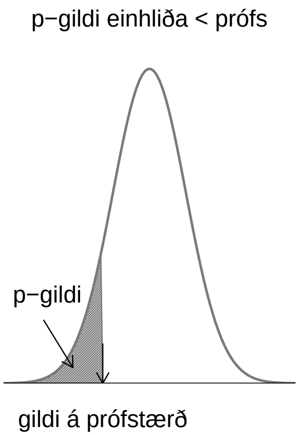
p-gildi

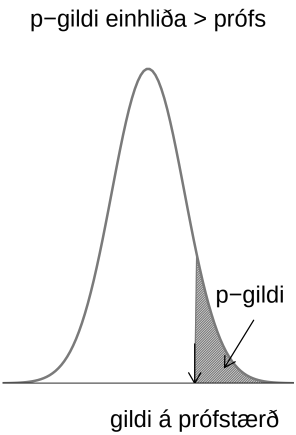
- **p-gildi** eru líkurnar á því að fá jafn ósennilega niðurstöðu eða ósennilegri og fengin er ef núlltilgátan er sönn.
- Hafna skal H_0 sé p-gildið minna en α.
- Sé p-gildið stærra en α er ekki hægt að hafna núlltilgátunni.

Styrkur

Styrkur (power) tilgátuprófs er líkurnar á því að hafna núlltilgátu sem er í raun ósönn. Hann er oft táknaður með $1 - \beta$

p-gildi


p−gildi einhliða < prófs
p−gildi
gildi á prófstærð


p−gildi einhliða > prófs
p−gildi
gildi á prófstærð

p-gildi

Sé unnið í "höndunum"getum við aðeins fundið p-gildi fylgi prófstærðin okkar stöðluðu normaldreifingunni (hinar töflurnar eru ekki nógu ítarlegar).

p-gildi - staðalaða normaldreifingin

Einhliða minna en próf:
Við leitum að gildinu á prófstærðinni í z-dálkinum í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar. P-gildið er jafnt gildinu í $\Phi(z)$-dálkinum því á hægri hlið.
Einhliða stærra en próf:
Við leitum að gildinu á prófstærðinni í z-dálkinum í töflu stöðluðu normaldreifingarinnar og lesum gildið úr $\Phi(z)$-dálkinum því á hægri hlið. P-gildið er jafnt $1 - \Phi(z)$.
Tvíhliða próf:
Sé gildið á prófstærðinni okkar neikvætt förum við eins að og þegar við vinnum með einhliða minna en próf en við þurfum að margfalda gildið með 2.
Sé gildið á prófstærðinni okkar jákvætt förum við eins að og þegar við vinnum með einhliða stærra en próf en við þurfum að margfalda gildið með 2.

Villur af gerð I og II

Villa af gerð I

Villa af gerð I er sú villa að hafna núlltilgátu sem var í raun sönn. Líkurnar á villu af gerð I eru α-stig prófsins.

Villa af gerð II

Villa af gerð II er sú villa að hafna ekki núlltilgátu sem var í raun ósönn. Líkurnar á villu af gerð II eru β, þar sem $1-\beta$ er styrkur prófsins.

	H_0 er sönn	H_0 er röng
Hafna H_0	Villa af gerð I Líkur: α	Rétt ályktun Líkur: $1-\beta$
Hafna ekki H_0	Rétt ályktun Líkur: 1-α	Villa af gerð II Líkur: β

Umræða í tíma

Villa af gerð I og II eru flókin hugtök. Mér hefur gengið ágætlega að útskýra þau með dæmi úr lyfjaiðnaðnum.

Hugsum okkur lyfjafyrirtæki sem er að reyna að koma lyfi á markað og framkvæmir því viðeigandi rannsókn. Lyfjafyrirtækið þarf að sýna fram á að lyfið virkar og því eru tilgáturnar (settar fram á formlegri hátt síðar):

$$
\begin{aligned}
H_0 &: \text{ Lyfið virkar ekki} \\
H_1 &: \text{ Lyfið virkar}
\end{aligned}
$$

Í þessu dæmi er α (villa af gerð I) líkurnar á að lyf sem ekki virkar fari á markað (martröð neytenda) og β (villa af gerð II) eru líkurnar á því að lyfið virki en ekki náist að sýna fram á það og því fer það ekki á markað (martröð lyfjafyrirtækisins).

Tilgátuprófi ekki hafnað

Það geta margvíslegar ástæður legið að baki því að tilgátuprófi er ekki hafnað:

- Fjöldi mælinga var of lítill og þar af leiðandi hafði prófið lítinn styrk.
- Núlltilgátan er í raun sönn.
- Líkanið okkar hæfir ekki gögnunum - þær forsendur sem við gerum ráð fyrir að gögnin uppfylli standast ekki.

Við megum aldrei fullyrða hvert ofangreinda atriða var ástæðan!
Við megum þó færa rök fyrir því að ein ofangreindra ástæða sé sú sennilegasta.

Samband öryggisbila og tilgátuprófa

Ef gildið á α er það sama fyrir bæði öryggisbil og tilgátupróf fyrir sömu stikann er eftirfarandi jafngilt:

- Við **höfnum** núlltilgátunni um að tiltekinn stiki hljóti ákveðið gildi.
- Öryggisbilið sem við reiknum fyrir stikann inniheldur **ekki** það gildi.

Hvað ef við viljum sýna fram á engan mun?

- Tilgátupróf gagnast okkur fyrst og fremst til að sýna að lýsistærðar séu **ólíkar**, eða að sýna fram á að það **sé samband** milli breyta.
- Þau eru hins vegar erfiðari í framkvæmd til að sýna fram á hlutlaust ástand.
- Munið að við fullyrðum aldrei núlltilgátu!
- Ef við viljum draga þá ályktun að hlutir séu svipaðir er gott að gera það með **öryggisbilum**.
- Mesti sennilegi munur er þá ekki meiri en efri (eða neðri) mörk öryggisbilsins.

Framkvæmd tilgátuprófa

Framkvæmd tilgátuprófa

1 Ákveða hvaða tilgátupróf er viðeigandi fyrir gögnin okkar.

2 Ákveða hæstu ásættanlegu villulíkur.

3 Setja fram núlltilgátu og ákveða um leið áttun prófsins (einhliðatvíhliða).

4 Reikna prófstærðina sem svarar til tilgátuprófsins.

5a Kanna hvort prófstærðin falli á höfnunarsvæði tilgátuprófsins.

5b Kanna p-gildi tilgátuprófsins.

6 Draga ályktun.